Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Fakultät für Mathematik

Diplomarbeit

Simulation verschiedener Approximationsmethoden bei stochastischen Differentialgleichungen

Verfasser:

Anja Schulze

Betreuer:

Prof. Gerd Christoph

6. Juni 2003

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis **v**

1 Grundlagen **3**

1.1 Allgemeine Grundlagen 3

1.2 Grundlagen aus der Stochastik 4

1.3 Grenzwerte 6

1.4 Ito– und Stratonovich–Integral 6

1.5 Das Ito-Lemma 15

2 Stochastische Differentialgleichung **19**

2.1 Einführung 19

2.2 Die lineare Differentialgleichung 22

2.3 Starke und schwache Lösungen stochastischer Differentialgleichungen 23

2.4 Die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen 25

2.5 Eigenschaften der Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen . . . 29

3 Das Black-Scholes-Modell 31

3.1 Das Modell . . . 32

3.2 Eine Zinsrate von Null . . . 33

3.3 Eine positive Zinsrate . . . 36

3.4 Zusammenfassung . . . 37

3.5 Black-Scholes-Formel . . . 37

3.6 Anwendungsbeispiel . . . 39

4 Approximationsverfahren 41

4.1 Die Euler–Maruyama–Approximation . . . 41

4.2 Die Milstein–Approximation . . . 43

4.3 Die Taylor–Approximation 1,5–ter Ordnung . . . 46

4.4 Bewertung der Approximationsmethoden . . . 47

4.4.1 Direkter Vergleich . . . 47

4.4.2 Fehleranalyse . . . 49

4.4.3 Konvergenzverhalten . . . 52

4.4.4 "Konvergenzgeschwindigkeit" . . . 53

5 Das Programm 55

5.1 Python . . . 55

5.2 Xgraps . . . 55

5.3 Eine neue Approximationsmethode wird in das Programm eingebaut 58

Literaturverzeichnis **61**

Abbildungsverzeichnis

3.1 Zusammenhang zwischen dem Gewinn und dem Aktienkurs zum Endzeitpunkt T einer Short– und eine Long–Call–Option. 38

4.1 Die Euler–Approximation im Vergleich mit der exakten Lösung, mit $n = 100$ und $n = 500$ Realisierungen, $\mu(Y_{i-1}) = 0.01\,Y_{i-1}$, $\sigma(Y_{i-1}) = 0.5\,Y_{i-1}$ sowie $Y_0 = 100$ im Intervall $[0, 1]$ und eine Vergrößerung auf $[0.3, 0.35]$. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.) 43

4.2 Die Milstein–Approximation im Vergleich mit der exakten Lösung, mit $n = 100$ und $n = 500$ Realisierungen, $\mu(X_{t_{i-1}}) = 0.01\,X_{t_{i-1}}$, $\sigma(X_{t_{i-1}}) = 0.5\,X_{t_{i-1}}$ sowie $X_0 = 100$ im Interval $[0, 1]$ und eine Vergrößerung auf $[0.2, 0.25]$. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.) 46

4.3 Die Taylor–Approximation im Vergleich mit der exakten Lösung, mit $n = 100$ und $n = 500$ Realisierungen, $\mu(X_{t_{i-1}}) = 0.01\, X_{t_{i-1}}$, $\sigma(X_{t_{i-1}}) = 0.5\, X_{t_{i-1}}$ sowie $X_0 = 100$ auf dem Intervall $[0, 1]$ und eine Vergrößerung auf $[0.75, 0.83]$. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.) 48

4.4 Die Euler– und die Milstein–Approximation im Vergleich mit der exakten Lösung, mit $n = 100$ Realisierungen, $\mu(X_{t_{i-1}}) = 0.01\, X_{t_{i-1}}$, $\sigma(X_{t_{i-1}}) = 0.5\, X_{t_{i-1}}$ sowie $X_0 = 100$. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.) 48

4.5 Die Euler– und die Milstein–Approximation im Vergleich mit der exakten Lösung, mit $n = 500$ Realisierungen, $\mu(X_{t_{i-1}}) = 0.01\, X_{t_{i-1}}$, $\sigma(X_{t_{i-1}}) = 0.5\, X_{t_{i-1}}$ sowie $X_0 = 100$. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.) 49

4.6 Die Taylor–Approximationmethode im Vergleich mit dem Euler– und dem Milstein–Verfahren und der exakten Lösung, mit $n = 100$ Realisierungen. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.) 50

4.7 Die Taylor–Approximationmethode im Vergleich mit dem Euler– und dem Milstein–Verfahren und der exakten Lösung, mit $n = 500$ Realisierungen. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.) 50

5.1 Ein Bildschirmfoto des Programms. 56

Einleitung

In den letzten Jahre hat das Interesse an stochastischen Differentialgleichung stetig zu genommen. Durch die viel gelobte Black–Scholes–Merton–Formel wurde das Studium der numerischen Lösung auch in dem Bereich Wirtschaft vorangetrieben.

In der Finanzmathematik ist die Bewertung von Optionen von großer Bedeutung. Da Aktienkurse durch eine lineare stochastische Differentialgleichung simuliert werden, ist die Erforschung dieses Gebietes ein besonders wichtiger Aspekt für Banken und Versicherungen.

Lineare stochastische Differentialgleichungen haben den Vorteil, dass sie mittels des Ito–Lemmas explizit lösbar sind. So das wir die verschiedenen numerischen Lösungen mit der expliziten Lösung vergleichen können.

Das Buch von Kloeden und Platen *"Numerical Solution of Stochastic Differential Equations"*, [KP95], dient als Grundlage dieser Arbeit. Viele Beispiele und Computerübungen werden aufgezeigt, doch es fehlte bislang eine graphische Oberfläche.

Diese Arbeit gibt einen groben Überblick über stochastische Differentialgleichungen und ihre Anwendungen, zusammen mit einer Darstellung der numerischen Lösungen. Zu Beginn vermittelt diese Arbeit die Grundlagen, die in den darauffolgenden Kapitel angewendet werden. Auf die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen werden wir eingehen, aber auch das Black–Scholes–Modell betrachten wir näher. Der wichtigste Teil ist die Untersuchung der Approximationsmethoden. Ein Programm inklusive graphischer Oberfläche, mit dessen Hilfe verschiedene Annäherungsverfahren

dargestellt werden, um sie unter anderem zu bewerten und zu vergleichen, ist das Hauptergebnis dieser Diplomarbeit. Zum Ende werden wir darstellen, wie wir eine neue Approximationsmethode in das Programm integrieren können.

Dieses Programm ist lauffähig unter den Betriebssystemen Linux und Windows. Der Programmcode ist in einer objektorientierten Sprache geschrieben und leicht erweiterbar. Die graphische Oberfläche ermöglicht es uns, die verschiedenen Approximationen mit der expliziten Lösungen graphisch zu vergleichen. Auf andere Bewertungsmethoden, wie Fehlerberechnung und Konvergenzverhalten, gehen wir im Abschnitt 4.4 ein.

Mein Dank gilt meinem Betreuer Prof. Gerd Christoph und Hendrik Muhs für die hilfreichen und kritischen Anregungen.

Kapitel 1

Grundlagen

Ziel dieses Kapitels ist es die Grundlagen zu definieren, die in den folgenden Abschnitten verwendet werden. Es soll zum Nachschlagen dienen.

Wir gehen dabei von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aus.

1.1 Allgemeine Grundlagen

Wir beginnen mit Grundlagen aus der Analysis, die uns bei den Definitionen des Ito– und Stratonovich–Integral behilflich sein werden.

Definition 1.1 (p-Variation) Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathcal{R}$, wobei $\mathcal{R}$ die Menge der reellen Zahlen ist, ist von beschränkter p-Variation ($p > 0$), wenn

$$\sup_{\tau_n} \sum_{i=1}^{n} \mid f(t_i) - f(t_{i-1}) \mid^p < \infty,$$

wobei das Supremum über alle Intervallzerlegungen $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ genommen wird.

Satz 1.2 (Mittelwertsatz) Die Funktion $f : [a,b] \to \mathcal{R}$ sei auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Definition 1.3 (Klassische Kettenregel) Die Funktionen $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ und $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ seien differenzierbar, dann gilt:

$$(f(g(s)))' = f'(g(s)) \cdot g'(s) \tag{1.1}$$

bzw. als Integralform:

$$\begin{aligned} f(g(t)) - f(g(s)) &= \int_0^t f'(g(s)) \cdot g'(s) ds & (1.2) \\ &= \int_0^t f'(g(s))\, dg(s) \ . & (1.3) \end{aligned}$$

1.2 Grundlagen aus der Stochastik

Die Definitionen aus diesem Abschnitt sind sehr wichtig für diese Arbeit. Viele Definitionen setzen wir aber voraus und verweisen auf Einführungsliteratur.

Definition 1.4 (Wiener-Prozess) Ein stochastischer Prozess $W = (W_t : t \geq 0)$ heißt Wiener-Prozess, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Der Prozess beginnt mit Null: $W_0 = 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1 (bzw. P-fast sicher).
- Der Prozess hat stationäre und unabhängige Zuwächse, d.h.
  - W hat stationäre Zuwächse, wenn

    $W_t - W_s =^d W_{t+h} - W_{s+h}$ für alle $t, s \geq 0$ und $h > 0$ mit $t + h, s + h \geq 0$.

    das heißt, dass die Verteilungen der Zufallsvariablen $W_t - W_s$ und $W_{t+h} - W_{s+h}$ gleich sind.
  - W hat unabhängige Zuwächse, wenn für jedes $t_i \geq 0$ mit $t_1 < \ldots < t_n$ und $n \geq 1$ gilt:

    $$W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

    sind paarweise unabhängige Zufallsvariablen.

- Für jedes $t \geq 0$ ist W_t normal-($\mu = 0, \sigma^2 = t$)-verteilt.

Definition 1.5 (White-Noise-Prozess) Ein stochastischer Prozess $\epsilon = (\epsilon_t : t = 1, 2, \ldots, T)$ heißt White-Noise-Prozess, wenn $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_T$ unabhängig und identisch verteilt sind mit Erwartungswert 0 und konstanter Varianz σ_ϵ^2. (Dabei ist σ_ϵ^2 beliebig, aber konstant für alle $t = 1, 2, \ldots, T$.)

Definition 1.6 (Filtration) Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Dann heißt $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ Filtration, falls für alle $0 < s < t$ gilt: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.
- Im zeitdiskreten Fall ist die Filtration $(\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Folge von σ-Algebren.
- Der stochastische Prozess $Y = (Y_t : t \geq 0)$ ist adaptiert an die Filtration $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$, falls für die von Y erzeugte σ-Algebra gilt: $\sigma(Y_t) \subset \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$.
- Der diskrete Zeitprozess $(Y_n : n = 0, , 1, 2 \ldots)$ ist an $(\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \ldots)$ adaptiert, falls $\sigma(Y_n) \subset \mathcal{F}_n$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Der stochastische Prozess $(Y_t : t \geq 0)$ ist stets an seine natürliche Filtration $\sigma(Y_s : s \leq t)$ adaptiert.

Wir betrachten den stochastischen Prozess $(X_t : t \geq 0)$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und wir haben zur Zeit s die Information $(\mathcal{F}_s, s \geq 0)$. Wie wirkt sich unser Wissen $\mathcal{F}_s$ zur Zeit s auf X_t mit $t > s$ aus? Was gilt für $E(X_t \mid \mathcal{F}_s)$? Bei der Beantwortung dieser Frage spielt folgende Definition eine wichtige Rolle.

Definition 1.7 (Martingal)

- Der Prozess $X = (X_t : t \geq 0)$ heißt zeitstetiges Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ falls:
  - $E(X_t) < \infty$
  - X ist adaptiert an $\mathcal{F}_t$
  - $E(X_t \mid F_s) = X_s$ mit $s < t$.

- Der Zeitprozess $(X_n : n = 0, 1, 2, \ldots)$ heißt zeitdiskretes Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \ldots)$ falls:
  - $E(X_n) < \infty$
  - X ist adaptiert an $\mathcal{F}_n$
  - $E(X_{n+1} \mid F_n) = X_n$.

1.3 Grenzwerte

Definition 1.8 (fast sichere Konvergenz) Eine Folge (A_n) konvergiert fast sicher (f.s.) bzw. mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen A ($A_n \longrightarrow^{f.s.} A$), wenn

$$P(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} A_n(\omega) = A(\omega)) = 1.$$

Definition 1.9 (L^p-Konvergenz) Sei $p > 0$. Die Folge (A_n) konvergiert in L^p oder im p-ten Mittel gegen A ($A_n \longrightarrow^{L^p} A$), wenn

1. $E(\mid A_n \mid^p + \mid A \mid^p) < \infty$ und
2. $E(\mid A_n - A \mid^p) \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.

1.4 Ito– und Stratonovich–Integral

Die Grenzwert Definitionen spielen eine wichtige Rolle bei den Herleitungen des Ito– und des Stratonovisch–Integral. Doch vorab untersuchen wir das Integral der Form $\int \ldots dW_t$.
Zu Anfang betrachten wir einen Wiener-Prozess $(W_t : t \geq 0)$ und zeigen, dass das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^1 W_t \, d\,W_t$ nicht existiert.

Das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^1 f(t) \, d\,g(t)$ existiert[1], wenn folgendes gilt:

- Die Funktionen f und g haben nicht in demselbem Punkt $t \in [0, 1]$ eine Unstetigkeitsstelle.

[1] vergleich [Mik98], Seite 94.

- Die Funktion f ist von beschränkter p-Variation ($p > 0$) und g ist von beschränkter q-Variation ($q > 0$), so dass gilt:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1.$$

Lemma 1.10 Die Pfade des Wiener-Prozesses sind von unbeschränkter Variation ($p = 1$) auf dem endlichen Intervall $[0, T]$, d.h.

$$\sup_{\tau_n} \sum_{i=1}^{n} \mid W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \mid = \infty$$

wobei das Supremum über alle möglichen Intervallzerlegungen τ_n auf $[0, T]$ genommen wird.

Beweis. Vergleich [Mik98] auf Seite 189. ■

Die Funktionen $f(t) = W_t = g(t)$ sind von beschränkter p–Variation für $p \geq 2$, aber $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} \not> 1$ mit $p \geq 2$. Daraus folgt, dass das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^1 W_t \, d\, W_t$ nicht existiert.

Betrachten wir das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^1 f(t) \, d\, W_t$, wobei $f(t)$ eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung $f'(t)$ ist. Mit dem Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(c) = K > 0$$

bzw.

$$f(t) - f(s) = K \cdot (t - s) \;\text{ mit } s < t.$$

Daraus folgt:

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} \mid f(t_i) - f(t_{i-1}) \mid \leq K \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})}_{=(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \ldots + (t_n - t_{n-1})} = K \cdot (t_0 - t_n) < \infty,$$

wobei das Supremum über alle möglichen $[0, 1]$-Intervallzerlegungen $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ genommen wird. Damit ist $f(t)$ von beschränkter p–Variation mit $p = 1$.

Wir erinnern uns, dass W_t von beschränkter p-Variation mit $p \geq 2$ ist. Daraus folgt, dass das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^1 f(t)dW_t$ existiert, denn $\frac{1}{p} + \frac{1}{1} > 1$ mit $p \geq 2$.

Betrachten wir erneut $\int_0^1 W_t dW_t$ und untersuchen die Riemann–Stieltjes–Summe auf dem Intervall [0,t] mit $t \in [0,1]$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}} \cdot \triangle_i W \tag{1.4}$$

wobei $\triangle_i W = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ ist und somit gilt:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (W_{t_{i-1}} \cdot W_{t_i} - {W_{t_{i-1}}}^2).$$

Es gilt mit der binomischen Formel:

$$\begin{aligned} {W_{t_{i-1}}}^2 - 2W_{t_{i-1}}W_{t_i} + {W_{t_i}}^2 &= (W_{t_{i-1}} - W_{t_{i-1}})^2 \\ W_{t_{i-1}}W_{t_i} &= \frac{1}{2}\left(-(W_{t_{i-1}} - W_{t_{i-1}})^2 + {W_{t_{i-1}}}^2 + {W_{t_i}}^2\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Riemann-Stieltjes-Summe:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2}\left(-(W_{t_{i-1}} - W_{t_{i-1}})^2 + {W_{t_{i-1}}}^2 + {W_{t_i}}^2\right) - {W_{t_{i-1}}}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-\frac{1}{2}(W_{t_{i-1}} - W_{t_{i-1}})^2 + \frac{1}{2}({W_{t_i}}^2 - {W_{t_{i-1}}}^2)) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \triangle_i W^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} ({W_{t_i}}^2 - {W_{t_{i-1}}}^2) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \triangle_i W^2 + \frac{1}{2}({W_{t_1}}^2 - \underbrace{{W_{t_0}}^2}_{=0} + {W_{t_2}}^2 - {W_{t_1}}^2 + \ldots + {W_{t_{n-1}}}^2 - {W_{t_{n-2}}}^2 + \underbrace{{W_{t_n}}^2}_{={W_t}^2} - {W_{t_{n-1}}}^2) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \triangle_i W^2 + \frac{1}{2}{W_t}^2 = \frac{1}{2}{W_t}^2 - \frac{1}{2}Q_n(t) \ \text{ mit } \ Q_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \triangle_i W^2. \end{aligned}$$

Satz 1.11 $Q_n(t)$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen t:

$$Q_n(t) \longrightarrow^{L^2} t.$$

Beweis. Es ist zu zeigen:

1. $E(\mid Q_n(t) \mid^2 + \mid t \mid^2) < \infty$
2. $E(\mid Q_n(t) - t \mid^2) \longrightarrow 0$ mit $n \to \infty$.

zu 1. $E(\mid Q_n(t) \mid^2 + \mid t \mid^2) = \sum_{i=1}^n E(\triangle_i W^2) + t^2 < \infty$.

zu 2. Wir wissen über $Q_n(t)$:

$$\begin{aligned} E(Q_n(t)) &= E(\sum_{i=1}^n \triangle_i W^2) = \sum_{i=1}^n E(\triangle_i W^2) = \sum_{i=1}^n \triangle_i = t, \\ &\text{wobei } \triangle_i = t_i - t_{i-1} \\ Var(Q_n(t)) &= E\left(Q_n(t) - E\left(Q_n(t)\right)^2\right) = E\left(Q_n(t) - t\right)^2 \to ? \end{aligned}$$

Aus dem Konvergenzverhalten der Varianz läßt sich auf das Konvergenzverhalten von $Q_n(t)$ schließen.

$$\begin{aligned} Var(Q_n(t)) &= Var(\sum_{i=1}^n \triangle_i W^2) = \sum_{i=1}^n Var(\triangle_i W^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(E(\triangle_i W)^4 - \left(E(\triangle_i W^2)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^n \left(E(\triangle_i W^4) - \triangle_i{}^2\right) \end{aligned}$$

Es gilt: $\triangle_i W = W_{t_i} - W_{t_{i-1}} =^d W_{t_i - t_{i-1}}$ ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\triangle_i$ genau wie die Zufallsvariable $\sqrt{\triangle_i} W_1$. Da W_1 nomal-(0,1)-verteilt ist, ist der 4. Moment $E(W_1)^4 = 3$. Damit:

$$E(\triangle_i W^4) = E((\sqrt{\triangle_i} W_1)^4) = \triangle_i{}^2 3.$$

Daraus folgt für die Varianz:

$$\begin{aligned} Var(\sum_{i=1}^n \triangle_i W^2) &= \sum_{i=1}^n \left(E(\triangle_i W^4) - \triangle_i{}^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(3\triangle_i{}^2 - \triangle_i{}^2\right) = 2\sum_{i=1}^n \triangle_i{}^2. \end{aligned}$$

Für $\delta_n = \max_{i=1,\dots,n}(t_i - t_{i-1}) = \max_{i=1,\dots,n} \triangle_i \to 0$ mit $n \to \infty$ folgt:

$$Var(Q_n(t)) = 2\sum_{i=1}^{n} \triangle_i{}^2 \leq 2\sum_{i=1}^{n}(\max_{i=1,\dots,n} \triangle_i) \cdot \triangle_i = 2\,\delta_n \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \triangle_i}_{=t}. \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Damit gilt: $E(\mid Q_n(t) - t \mid^2) \longrightarrow 0$ mit $n \to \infty$.

■

Diesen Satz wenden wir auf unsere Riemann–Stieltjes–Summe an und folgern:

Folgerung 1.12 Es gilt:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(W_t{}^2 - Q_n(t)\right) \longrightarrow^{L^2} \frac{1}{2}\left(W_t{}^2 - t\right).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{2}\left(W_t{}^2 - Q_n(t)\right) - \frac{1}{2}\left(W_t{}^2 - t\right)\right)^2 &= \frac{1}{2}E\left(W_t{}^2 - Q_n(t) - W_t{}^2 + t\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}E\left(t - Q_n(t)\right)^2 \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty \end{aligned}$$

■

Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $l.i.m.$:

$$E(f_n(t) - g(t))^2 \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty \Longleftrightarrow l.i.m. f_n(t) = g(t)$$

und folgern, dass

$$l.i.m. S_n := (I)\int_0^t W_s\, d\,W_s = \frac{1}{2}(W_t{}^2 - t) =: I_t(\omega) \tag{1.5}$$

ein stochastisches Ito–Integral ist.

Die Werte des Wiener-Prozesses wurden bis jetzt immer am linken Randpunkt des Intervalls $[t_{i-1}, t_i]$ betrachtet. Unter der Annahme, dass wir eine Zerlegung $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots t_n = t$ des Intervalls $[0, t]$ haben, gilt, dass

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),\ k = 1, \ldots, n$$

ein Martingal bezüglich der Filtration $\sigma(W_{t_i} : i = 1, \ldots, n)$ mit $k = 1, \ldots, n$ ist.
Den Beweis finden wir im [Mik98] auf Seite 82f.

Betrachten wir dagegen die Werte des Wiener-Prozesses im Mittelpunkt des Intervalls $[t_{i-1}, t_i]$, so geht die Martingaleigenschaft der Riemann-Stieltjes-Summe verloren:

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} W_{y_i}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

mit $y_i = \frac{1}{2}(t_{i-1} - t_i)$für $i = 1, \ldots, n$.

Diese Summe konvergiert im quadratischen Mittel (mit $\delta_n \to 0$) gegen den Ausdruck $\frac{1}{2}{W_t}^2$. (Das gilt mit den gleichen Argumenten wie für S_n.)
Diesen Ausdruck

$$l.i.m.\tilde{S}_n := (S)\int_0^t W_s \circ d\,W_s = \frac{1}{2}{W_t}^2 =: S_t(\omega). \tag{1.6}$$

ist ein stochastisches Integral, das sogenannten Stratonovich-Integral.

Bemerkung 1.13 Da der Grenzwert $\frac{1}{2}{W_t}^2$ kein Martingal bildet, bildet auch die Riemann-Stieltjes-Summe $\tilde{S}_n$ kein Martingal.

Begründet wird das durch folgenden Sachverhalt:

$$\begin{aligned} E(\frac{1}{2}W_t^2 \mid \mathcal{F}_s) &= \frac{1}{2}E(W_t^2 \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \frac{1}{2}E(((W_t - W_s) + W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}E(((W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)\,W_s + W_s^2) \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \frac{1}{2}E((W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) + 2E((W_t - W_s)\,W_s \mid \mathcal{F}_s) + E(W_s^2 \mid \mathcal{F}_s) \\
&= \frac{1}{2}(t-s) + 0 + \frac{1}{2}W_s^2 \neq \frac{1}{2}W_s^2 \quad \forall\, t > s.
\end{aligned}
$$

Satz 1.14 Für das Stratonovich-Integral gilt die Kettenregel, für das Ito-Integral dagegen nicht.

Beweis. Sei $f(t)$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt nach der Kettenregel:

$$\frac{1}{2}\frac{d\,f(t)^2}{d\,t} = f(t)\frac{d\,f(t)}{d\,t}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{2}f(t)^2 = \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d\,f(s)^2}{d\,s}ds = \int_0^t f(s)\frac{d\,f(s)}{d\,s}ds = \int_0^t f(s)\,d\,f(s).$$

Ersetzen wir den letzten Term durch das Stratonovisch–Integral $(S)\int_0^t W_s \circ dW_s = \frac{1}{2}W_t^2$, dass die Kettenregel erfüllt ist.

Dagegen gilt die Kettenregel nicht für das Ito–Integral $(I)\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t)$, denn:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(W_t^2 - t) &= \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t = \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d\,W_s^2}{d\,s}ds - \frac{1}{2}\int_0^t ds \\
&\neq \int_0^t W_s\frac{d\,W_s}{d\,s}ds = \int_0^t W_s\,d\,W_s.
\end{aligned}
$$

■

Befassen wir uns mit den charakteristischen Eigenschaften des Stratonovich-Integral:

$$E(\int_0^t W_s \circ dW_s) = E(\frac{1}{2}W_t^2) = \frac{1}{2}E(W_t^2) = \frac{1}{2}t \neq 0$$

$$\begin{aligned} Var(\int_0^t W_s \circ dW_s) &= Var(\frac{1}{2}W_t^2)) = E(\frac{1}{2}W_t^2)^2 - (E(\frac{1}{2}W_t^2))^2 \\ &= E(\frac{1}{4}W_t^4) - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}E(W_t^4) - \frac{1}{4}t^2 \\ (\text{ da } W_t =^d \sqrt{t}W_1) &= \frac{1}{4}E((\sqrt{t}\,W_1)^4) - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}T^2 \cdot 3 - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{2}t^2. \end{aligned}$$

Beschäftigen wir uns mit dem Ito-Integral genauer.

Das Ito-Integral für einen einfachen Prozess C

Wir setzen voraus, dass wir einen Wiener-Prozess $W = (W_t : t \geq 0)$ und die dazugehörige natürliche Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \leq t)$ haben.

Definition 1.15 (Der einfache Prozess) Der stochastiche Prozess $C = (C_t : t \in [0, T])$ heißt einfach, falls gilt:

1. Es existiert eine Intervallzerlegung: $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$.
2. Es existiert eine Folge $(Z_i)_{i=1,\ldots,n}$ von Zufallsvariablen, so dass

$$C_t = \begin{cases} Z_n & \text{falls} \quad t = T \\ Z_i & \text{falls} \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \text{ mit } i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

   Die Folge (Z_i) ist adaptiert an $(\mathcal{F}_{t_{i-1}} : i = 1, \ldots, n)$, das heißt Z_i ist Funktion des Wiener–Prozesses bis zu dem Zeitpunkt t_{i-1} mit $E(Z_i^2) < \infty$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Das Ito-Integral des einfachen Prozesses C auf $[0, T]$ ist gegeben durch:

$$\int_0^T C_s dW_s := \sum_{i=1}^n C_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^n Z_i \triangle_i W.$$

Der Wert des Ito-Integral $\int_0^t C_s dW_s$ ist (per Definition) die Riemann-Stieltjes-Summe des Pfades C, bewertet am linken Randpunkt des Intervalls $[t_{i-1}, t_i]$.

Definition 1.16 Das Ito-Integral von dem einfachen Prozess C auf $[0, T]$, $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ ist gegeben durch:

$$I_t(C) = \int_0^t C_s dW_s = \int_0^T C_s \mathcal{I}_{[0,t]}(s) dW_s = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i \triangle_i W + Z_k(W_t - W_{t_{k-1}}), \quad (1.7)$$

wobei $\sum_{i=1}^{n} Z_i \triangle_i W = 0$.

Satz 1.17 Der stochastische Prozess $I_t(C) = \int_0^t C_s dW_s$ mit $t \in [0,T]$ ist ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t : t \in [0,T])$.

Beweis. Vergleich [Mik98], Seite 104f. ■

Das allgemeine Ito-Integral

Wir haben bereits gezeigt, dass das Ito-Integral $\int_0^t W_s dW_s$ der Grenzwert im quadratischen Mittel der Riemann-Stieltjes-Summe ist. Wir zeigen, was mit einem allgemeinen Prozess passiert. Dazu nehmen wir folgendes an:

- C ist adaptiert an den Wiener-Prozess auf $[0,T]$, das heißt C_t ist Funktion von W_s mit $s \leq t$ und
- $\int_0^T E(C_s)^2 ds < \infty$.

Lemma 1.18 Sei C ein Prozess, der diese Annahmen erfüllt. Dann existiert eine Folge $(C^{(n)})$ von einfachen Prozessen, so dass

$$\int_0^T E(C_s - C_s^{(n)})^2 ds \longrightarrow 0 \text{ mit } n \to \infty$$

Beweis. Vergleich [KP95], Lemma 3.2.1. ■

Es folgt $C^{(n)} \longrightarrow^{L^2} C$. Da $C^{(n)}$ einfach ist, gilt:

$$I_t(C^{(n)}) = \int_0^t C_s^{(n)} dW_s \quad \forall n, t$$

Satz 1.19 Die Folge $(I(X^{(n)}))$ konvergiert im quardratischen Mittels gegen einen eindeutigen Grenzwertprozess. In der Tat existiert ein Prozess $I(C) = (I_t(C) : t \in [0,T])$ auf $[0,T]$, so dass:

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left[I_t(C) - I_t(C^{(n)})\right]^2\right) \longrightarrow 0 \text{ mit } n \to \infty.$$

Beweis. Vergleich [Mik98], Seite 191. ■

Definition 1.20 Der Grenzwertprozess im quadratischen Mittel $I(C)$ heißt Ito-Intergal des allgemeinen Prozesses C. Er wird definiert durch:

$$I_t(C) = \int_0^t C_s dW_s \text{ für } t \in [0, T].$$

Der Term $I_t(C) = \int_0^t C_s dW_s$ für $t \in [0, T]$ bildet einen stochastischen Prozess. Für $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ und $t \in [t_{k-1}, t_k]$ ist die Zufallsvariable $I_t(C)$ "abgeschlossen" zu der Riemann-Stieltjes-Summe

$$\sum_{i=1}^{k-1} C_{t_i} \triangle_i W + C_{t_k}(W_t - W_{t_{k-1}}).$$

Diese Approximation ist umso besser (im Sinne des quadratischen Mittels) für den Wert $I_t(C)$, je dichter die Zerlegung τ_n auf $[0, T]$ ist.

Betrachten wir zum Schluß zusammenfassend ein paar Eigenschaften des Ito-Integrals:

- $I_t(C)$ ist ein Martingal bezüglich der Wiener-Filtration $(\mathcal{F}_t : t \in [0, T])$. Vergleiche wir dazu [Mik98], Seite 192.
- $E(I_t(C)) = 0$.
- Isometrie-Eigenschaft

$$E(\int_0^t C_s dW_s)^2 = \int_0^t E(C_s^2) ds \text{ mit } t \in [0, T].$$

- Das Ito-Integral $I_t(C)$ ist linear.
- Der Prozess $I(C)$ hat stetige Pfade.

1.5 Das Ito-Lemma

In diesem Abschnitt werden wir das Ito-Lemma herleiten und einige Folgerungen daraus betrachten.

Beginnen wir mit der Kettenregel: $df(g) = f'dg$. Dieses Differential entspricht gerade dem 1. Ordnungsterm der Taylor-Entwicklung auf die zweifach differenzierbare Funktion $f(g(t))$:

$$f(g(t+dt)) - f(g(t)) = f'(g(t))\, dg(t) + \frac{1}{2} f''(g(t))[dg(t)]^2 + \underbrace{o(t)}_{\text{vernachlässigbar klein}}.$$

Da $dg(t) = g(t+dt) - g(t)$ gerade der Zuwachs auf dem Intervall $[t, t+dt]$ ist, gilt:

$$f(g(t) + dg(t)) - f(g(t)) = f'(g(t))\, dg(t) + \frac{1}{2} f''(g(t))[dg(t)]^2.$$

Ersetzen wir die Funktion $g(t)$ durch den Wiener-Prozess W_t mit $dW_t = W_{t+dt} - W_t$ (Zuwachs des Wiener-Prozesses auf dem Intervall $[t, t+dt]$), so folgt:

$$f(W_t + dW_t) - f(W_t) = f'(W_t)\, dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t)[dW_t]^2. \tag{1.8}$$

Es gilt:

$$(dW_t)^2 = (W_{t+dt} - W_t)^2 = (W_{t+dt-t})^2 = (W_{dt})^2 = dt.$$

Vergleich dazu [Mik98], Seite 99.

Damit gilt für die Gleichung (1.8):

$$f(W_t + dW_t) - f(W_t) = f'(W_t)\, dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt.$$

Diese Differentialgleichung umgeschreiben in eine Integralgleichung

$$\int_s^t df(W_x) = f(W_t) - f(W_s) = \int_s^t f'(W_x)\, dW_x + \frac{1}{2} \int_s^t f''(W_x) dx \;\; s < t$$

ist die einfachste Form des Ito-Lemmas.

Gehen wir weiter und wenden die gleiche Argumentation auf den stochastischen Prozess $f(t, W_t)$ an, wobei $f(t, x)$ eine stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung besitzt. Es folgt:

$$\begin{aligned} f(t+dt, W_{t+dt}) - f(t, W_t) &= f_1(t, W_t)\, dt + f_2(t, W_t) dW_t \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{11}(t, W_t) \underbrace{(dt)^2}_{\approx 0} + 2 f_{12}(t, W_t) \underbrace{dt dW_t}_{(dW_t)^3 = (dt)^{\frac{3}{2}} \approx 0} + f_{22}(t, W_t) \underbrace{(dW_t)^2}_{=dt} \right) \\ &\approx \left(f_1(t, W_t) + \frac{1}{2} f_{22}(t, W_t) \right) dt + f_2(t, W_t) dW_t \end{aligned} \tag{1.9}$$

Die Notation bedeutet:

$$\begin{aligned} f_i(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2) \mid_{x_1 = t, x_2 = x} \qquad i = 1, 2 \\ f_{ij}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, x_2) \mid_{x_1 = t, x_2 = x} \qquad i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

Die obere Differentialgleichung (1.9) ist äquivalent mit der Integralgleichung

$$\begin{aligned} & \textstyle\int_s^t \; f(x, W_x) = f(t, W_t) - f(s, W_s) \\ = & \textstyle\int_s^t \; \left(f_1(x, W_x) + \frac{1}{2} f_{22}(x, W_x) \right) dx + \int_s^t f_2(x, W_x) dW_x \end{aligned} \tag{1.10}$$

mit $s < t$.
Diese Gleichung bezeichnen wir als 1. Auslegung des Ito-Lemmas.

Eine andere Version des Ito–Lemmas hat als Grundlage den Prozess $f(t, X_t)$, wobei X gegeben ist durch

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)} ds + \int_0^t A_s^{(2)} dW_s. \tag{1.11}$$

Die beiden Prozesse $A^{(1)} = (A_t^{(1)} : t \geq 0)$ und $A^{(2)} = (A_t^{(2)} : t \geq 0)$ sind an den Wiener–Prozess adaptiert. Wir nehmen an, dass die obigen Integrale als Riemann– und Ito–Integral wohldefiniert sind.

Mit einer ähnlichen Argumentation wie der obigen Taylorreihenentwicklung , formulieren wir folgende 2. Auslegung des Ito–Lemmas[2].

Satz 1.21 Sei X ein Ito–Prozess bezüglich der Gleichung (1.11) und sei $f(t,x)$ eine Funktion, deren zweite partielle Ableitungen stetig ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(t,X_t) \quad - \quad & f(s,X_s) = \\ & \int_s^t \left[f_1(y,X_y) + A_y^{(1)} f_2(y,X_y) + \frac{1}{2}\left(A_y^{(2)}\right)^2 f_{22}(y,X_y) \right] dy \\ + \quad & \int_s^t A_y^{(2)} f_2(y,X_y) dW_y \quad \text{mit } s < t. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Unser Grundlagenkapitel schließen wir an dieser Stelle ab und wenden uns den stochastischen Differentialgleichungen zu.

[2] aus [Mik98], Seite 119f

Kapitel 2

Stochastische Differentialgleichung

Ziel dieses Kapitels ist es, einen Überblick über das vielseitige Thema stochastische Differentialgleichung zu vermitteln. Wir werden mit einer Einführung beginnen, in der wir die grundlegenden Weichen stellen. Anschließend betrachten wir die linearen stochastischen Differentialgleichungen, da sie für uns von besonderer Bedeutung sind, denn die Black–Scholes–Formel weist eine lineare Form auf.

Die Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen charakterisieren wir im Abschnitt 2.3, und zeigen dann die Existenz und Eindeutigkeit von ihnen. Zum Ende dieses Kapitels fassen wir die Eigenschaften der Lösungen zusammen.

2.1 Einführung

Zu Beginn dieses Abschnittes werden wir eine grundlegende Gleichung herleiten. An einem Beispiel demonstieren wir den Sachverhalt.

Seien $x(t)$ eine differenzierbare Funktion für $t \geq 0$ und $\mu(x,t)$ eine Funktion, die abhängig von t und von x mit $-\infty < x < \infty$ ist. Die Funktion $\mu(x,t)$ bezeichnen wir als Driftterm. Für alle $0 \leq t \leq T$ gelte:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu(x(t),t) \text{ und } x(0) = x_0. \tag{2.1}$$

Diese Differentialgleichung ist äquivalent zu der Integralgleichung:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \mu(x(s), s)ds, \tag{2.2}$$

wobei $x(t)$ Lösung der Differentialgleichung (2.1) mit Anfangswert x_0 ist.

Falls $\mu(x(t), t)$ die Lipschitz-Bedingung[1] erfüllt, dann existiert $x(t)$ und diese Lösung ist eindeutig. Diese Aussage werden wir im Abschnitt 2.4 beweisen bzw. die Beweisidee darstellen.
Von der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.1) kommen wir zu einer stochastischen Differentialgleichung in dem wir einen "noise"-Term $\sigma(x(t), t)\ \epsilon_t$ dazuaddieren, wobei ϵ_t ein White-Noise-Prozess ist. Also:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu(x(t), t) + \sigma(x(t), t)\ \epsilon_t \ \leftrightarrow\ dx(t) = \mu(x(t), t)\ dt + \sigma(x(t), t)\ \epsilon_t\ dt.$$

Zu beachten ist an dieser Stelle, dass die Lösung dieser Differentialgleichung ein stochastischen Prozess ist. Das berücksichtigen wir in der Gleichung:

$$dX_t = \mu(X_t, t)\ dt + \sigma(X_t, t)\ \epsilon_t\ dt \tag{2.3}$$

Bemerkung 2.1 Das "Rauschen" ϵ_t kann als formale Ableitung des Wiener-Prozesses aufgefasst werden:

$$\epsilon_t = \frac{dW_t}{dt} \text{bzw.} \epsilon_t\, dt = dW_t$$

Vergleichen wir dazu [Kle99], Seite118.

Damit vereinfachen wir die Gleichung (2.3):

$$dX_t = \mu(X_t, t)\ dt + \sigma(X_t, t)\ dW_t. \tag{2.4}$$

Die äquivalente Integralgleichung dazu ist:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)\ ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)\ dW_s \tag{2.5}$$

dabei ist das letztere Integral definiert als Ito–Integral für einen allgemeinen Prozess $\sigma = (\sigma(X_t, t) : t \in [0, T])$. Aus diesem Grund wird $X = (X_t : t \in [0, T])$ in diesem Zusammenhang als Ito–Prozess bezeichnet.

[1] vergleich dazu Annahme A2, d.h. Formel (2.14) auf der Seite 25

Anwendungsbeispiel: Wachstum mit einer unsicheren Zinsrate

Wir investieren einen Euro in eine Finanzanlage. Sei X_t der Wert der Anlage nach dem Zeitraum t.

Sei unsere Finanzanlage ein sicherer Sparbrief mit Zinsfuß r. Für die Änderung des Wertes im Verhältnis zur Änderung der Zeit gilt somit:

$$\frac{dX_t}{dt} = r\, X_t$$

Also:

$$\begin{aligned} dX_t = r\, X_t\, dt \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{X_t} dX_t = \int r dt \\ &\Rightarrow \quad \ln|X_t| = rt + \mathcal{C} \text{ mit } \mathcal{C} = konstant \\ &\Rightarrow \quad X_t = e^{rt+\mathcal{C}} \Rightarrow X_t = \mathcal{K}\, e^{rt} \\ \text{Da aus } X_0 = 1 \text{ folgt, dass } \mathcal{K} = 1 \quad &\Rightarrow \quad X_t = e^{rt} \end{aligned}$$

Ist die Zinsrate dagegen unsicher, so kann sie als $r + \sigma\epsilon_t$ modelliert werden, wobei ϵ_t ein White-Noise-Prozess ist. Daraus folgt:

$$\frac{dX_t}{dt} = X_0\,(r + \sigma\epsilon_t)\, X_t \Longleftrightarrow dX_t = r\, X_t\, dt + \sigma\, X_t\, \underbrace{\epsilon_t\, dt}_{=dW_t},$$

wobei W_t der Wiener-Prozess ist.

Satz 2.2 Die Gleichung $X_t = \exp\{(r - 0,5\,\sigma^2)dt + \sigma W_t\}$ mit $X_0 = 1$ ist Lösung der Differentialgleichung $dX_t = r\, X_t\, dt + \sigma\, X_t\, dW_t$.

Beweis. Wir werden die 1. Auslegung des Ito-Lemmas verwenden, also Gleichung (1.10) auf der Seite 17. Unsere Ausgangsgleichung ist

$$X_t = f(t, W_t) = e^{(r-0,5\sigma^2)t+\sigma W_t}.$$

Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} f(t,x) &= e^{(r-0,5\sigma^2)t+\sigma W_t} \\ f_1(t,x) &= (r - 0,5\sigma^2) \cdot f(t,x) \\ f_2(t,x) &= \sigma \cdot f(t,x) \\ f_{22}(t,x) &= \sigma^2 \cdot f(t,x) \end{aligned}$$

Dann gilt mit der Formel (1.10):

$$\begin{aligned} f(t,W_t) - f(0,W_0) &= X_t - X_0 \\ &= \int_0^t \left((r - 0,5\sigma^2) f(x,W_x) + \frac{1}{2}\sigma^2 f(x,W_x) \right) dx + \int_0^t \sigma f(x,W_x) dW_x \\ &= r \int_0^t X_x dx + \sigma \int_0^t X_x dW_s \\ \text{Und damit: } dX_t &= r\, X_t\, dt + \sigma\, X_t\, dW_t. \end{aligned}$$

■

2.2 Die lineare Differentialgleichung

Die linearen stochastischen Differentialgleichungen bilden eine Klasse von stochastischen Differentialgleichungen, die explizit gelöst werden können.
Die allgemeine lineare stochastische Differentialgleichung lautet:

$$dX_t = (\mu_1(t) + \mu_2(t)X_t)dt + (\sigma_1(t) + \sigma_2(t)X_t)dW_t, \tag{2.6}$$

wobei $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\sigma_1(t)$ und $\sigma_2(t)$ spezielle Funktionen von der Zeit t sind oder konstant.

Im Falle konstanter Koeffizienten nennen wir die stochastische Differentialgleichung (2.6) *selbstständig bzw. autonom.*

Ist $\sigma_2(t) = 0$, so wird aus (2.6):

$$dX_t = (\mu_1(t) + \mu_2(t)X_t)dt + \sigma_1(t)dW_t. \tag{2.7}$$

Diese Differentialgleichung ist äquivalent zu der Integralgleichung:

$$X_t = X_0 + \int_0^t (\mu_1(s) + \mu_2(s)X_s)ds + \int_0^t \sigma_1(s)dW_s$$

für alle $0 \leq t \leq T$.
Diese Art der Gleichungen werden *lineare Gleichungen mit additivem Noise* genannt.

Sei $\mu_1(t) = 0 = \sigma_1(t)$ für alle $t \geq 0$ und seien $\mu_2(t) = \mu$ und $\sigma_2(t) = \sigma$ konstante Funktionen. Dann wird aus (2.3):

$$dX_t = \mu\, X_t\, dt + \sigma\, X_t\, dW_t \tag{2.8}$$

bzw.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu\, X_s\, ds + \int_0^t \sigma\, X_s\, dW_s. \tag{2.9}$$

Bereits in Satz 2.2 haben wir gezeigt, dass

$$X_t = X_0\, \exp\{(\mu - 0,5\sigma^2)t + \sigma\, W_t\}$$

Lösung von (2.8) ist.

2.3 Starke und schwache Lösungen stochastischer Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden wir die Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen charakterisieren. Unsere Ausgangsgleichung ist:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t. \tag{2.10}$$

Die Lösung dieser Gleichung hat bestimmte Eigenschaften. Wir unterscheiden starke und schwache Lösungen.

Definition 2.3 (starke Lösung) Eine Lösung $X = (X_t : t \geq 0)$ heißt stark bezüglich der stochastischen Differentialgleichung (2.10), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle $t \geq 0$ ist die Lösung (X_t) an einen gegebenen Wiener Prozess (W_t) adaptiert, das heißt X_t ist Funktion von W_s für $s \leq t$;
- das Riemann-Integral $\int_0^t \mu(X_s, s)ds$ und das Ito-Intergral $\int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$ sind wohldefiniert, wobei

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s \text{ für alle } t \geq 0.$$

- $X = (X_t : t \geq 0)$ ist Funktion von $W = (W_t : t \geq 0)$, das heißt die Trajektorien von X_t stehen im funktionalen Zusammenhang zu den Trajektorien von W_t.

Veranschaulichen wir uns diesen Sachverhalt an einem Beispiel.

Beispiel 2.4 Betrachten wir die Langevin Gleichung

$$dX_t = -\mu\, X_t\, dt + \sigma\, dW_t \tag{2.11}$$

mit μ, $\sigma > 0$ konstant.
Definieren wir $Y_t = X_t\, e^{\mu t}$ und wenden wir darauf die Produktregel an, dann gilt:

$$dY_t = e^{\mu t} dX_t + \mu\, e^{\mu t}\, X_t dt.$$

Ersetzen wir dX_t durch (2.11), so erhalten wir:

$$dY_t = e^{\mu t}(-\mu\, X_t\, dt + \sigma\, dW_t) + \mu\, e^{\mu t}\, X_t dt = \sigma\, e^{\mu t} dW_t \tag{2.12}$$

Wir suchen einen Prozess (X_t), der die Langevin Gleichung (2.11) löst. Es ist leicht zu sehen, dass

$$Y_t = Y_0 + \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW_s$$

die Gleichung (2.12) löst. Da $X_0 = Y_0$ folgt:

$$\begin{aligned} Y_t = X_t\, e^{\mu\ t} &= X_0 + \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW_s \\ X_t &= e^{-\mu t} X_0 + e^{-\mu t} \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW_s. \end{aligned}$$

Dieser Prozess löst[2] die Langevin Gleichung (2.11).

Dieser Prozess ist eine starke Lösung, denn wenn wir X_t als Funktion $X_t = u(t, Z_t)$ auffassen mit $Z_t = \int_0^t e^{\mu s} dW_s$ und $u(t, z) = e^{-\mu t} X_0 + \sigma\, e^{-\mu t} z$, dann sind der erste und dritte Punkt der Definition erfüllt.
Der zweite Punkt ist auch erfüllt, da $-\mu \int_0^t X_s\, ds$ als Riemann–Stieltjes–Integral und $\sigma \int_0^t dW_s$ als Ito-Integral wohldefiniert sind.

[2] der vollständige Beweis ist im [Mik98] auf der Seite 143 zu finden

Bei starken Lösungen besteht ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Pfaden von X_t und W_t. Bei schwachen Lösungen dagegen muss diese funktionale Verkopplung nicht bestehen.

Schwache Lösungen X_t sind hilfreich, um den Verteilungscharakter von X_t zu bestimmen. Damit wir den Erwartungswert und die Kovarianzfunktion von dem Prozess $X = (X_t : t \geq 0)$ näher beschreiben können, müssen die Pfade von X_t nicht bekannt sein. Eine genauere Definition ist im Buch [Kle99] im Abschnitt 5.6 zu finden. Jede starke Lösung ist somit auch eine schwache Lösung.

2.4 Die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir behauptet, dass eine Lösung für diese oder jene Differentialgleichung existiert bzw. konkret ausgerechnet. Doch bis dahin haben wir nicht gezeigt, dass solche Lösungen existieren und eindeutig sind. Das wollen wir in diesem Abschnitt nachholen.
Unsere Ausgangsgleichung ist:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t. \tag{2.13}$$

Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen für diese Gleichungen zu zeigen, müssen die Koeffizientenfunktionen $\mu, \sigma : \mathcal{R} \times [0, T] \to \mathcal{R}$ gegeben sein und folgende Annahmen erfüllen:

A1 Messbarkeit Die Funktionen $\mu = \mu(x, t)$ und $\sigma = \sigma(x, t)$ sind L^2–messbar für $(x, t) \in \mathcal{R} \times [0, T]$.

A2 Die Lipschitz–Bedingung Es existiert eine Konstante $K_L > 0$, so dass gilt:

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)| \leq K_L|x - y| \tag{2.14}$$

und

$$|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq K_L|x - y|$$

für alle $t \in [0,T]$ und $x, y \in \mathcal{R}$.

A3 lineare Wachstumsgrenze Es gibt eine konstante Zahl $K_W > 0$ mit

$$|\mu(x,t)| + |\sigma(x,t)| \leq K_W\,(1 + |x|),$$

wobei $x \in \mathcal{R}, t \in [0,T]$.

A4 Anfangswertbedingung X_0 ist $\mathcal{A}_0$–messbar[3] mit $E\left(|X_0|^2\right) < \infty$.

Bevor wir jetzt anfangen und das Existenz- und Eindeutigkeitstheorem formulieren, brauchen wir noch drei Hilfsätze.

Lemma 2.5 (Die Gronwall-Ungleichung) Seien die Funktionen $\mu, \sigma : [0,T] \to \mathcal{R}$ integrierbar mit

$$0 \leq \mu(t) \leq \sigma(t) + L \int_0^t \mu(s)ds \tag{2.15}$$

für $t \in [0,T]$ und $L > 0$. Dann gilt:

$$\mu(t) \leq \sigma(t) + L \int_0^t e^{L(t-s)}\sigma ds$$

für $t \in [0,T]$.

Beweis. Der Teilbeweis ist im [Oek98] zu finden. ■

Lemma 2.6 (Die Ito-Isometrie)

$$E\left[\left(\int_S^T f(\omega,t)dW_t\right)^2\right] = E\left[\int_S^T f^2(\omega,t)dt\right] \tag{2.16}$$

für alle stetig messbaren Funktionen f mit $E[\int_S^T f^2(\omega,t)dt] < \infty$.

Beweis. Vergleiche dazu [Oek98], Seite 26. ■

Wir beginnen mit der Formulierung des Satzes. In diesem Satz gehen wir von einer starken Lösung aus. Wir beweisen die Eindeutigkeit. Den Existenz–Beweis ist im [Oek98], Seite 69, nachzulesen.

[3] $\mathcal{A}$ ist die σ-Algebra in unserem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Satz 2.7 Sei $T > 0$ und für die Funktionen $\mu, \sigma : \mathcal{R} \times [0,T] \to \mathcal{R}$ gelten die Annahmen A1–A4. Dann existiert für die Gleichung (2.13) eine eindeutige Lösung X_t mit der Eigenschaft:

$$E\left(\int_0^T |X_t|^2 dt\right) < \infty. \tag{2.17}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus der Ito-Isometrie (2.16) und aus der Lipschitz–Bedingung (2.14).
Seien $X_1(\omega,t) = X_t(\omega)$ und $X_2(\omega,t) = \hat{X}_t(\omega)$ Lösungen der Gleichung (2.13) mit den Anfangswerten $X_0, \hat{X}_0$, d.h. $X_1(\omega,0) = X_0$ und $X_2(\omega,0) = \hat{X}_0$ mit $\omega \in \Omega$.
Setze $a(\omega,s) = \mu(X_s,s) - \mu(\hat{X}_s,s)$ und $b(\omega,s) = \sigma(X_s,s) - \sigma(\hat{X}_s,s)$.
Betrachten wir $E\left(|X_t - \hat{X}_t|^2\right) =$

$$\begin{aligned}
&= E\left(|X_0 + \int_0^t \mu(X_s,s)ds + \int_0^t \sigma(X_s,s)dW_s - \hat{X}_0 - \int_0^t \mu(\hat{X}_s,s)ds - \int_0^t \sigma(\hat{X}_s,s)dW_s|^2\right)\\
&= E\left(|X_0 - \hat{X}_0 + \int_0^t a(\hat{X}_s,s)ds + \int_0^t b(\hat{X}_s,s)dW_s|^2\right)\\
&\le 3\,E\left(|X_0 - \hat{X}_0|^2\right) + 3\,E\left((\int_0^t a\,ds)^2\right) + 3\,E\left((\int_0^t b\,dW_s)^2\right)\\
&= 3\,E\left(|X_0 - \hat{X}_0|^2\right) + 3\,E\left(\int_0^t a^2 ds\right) + 3\,E\left((\int_0^t b^2 ds)^2\right)\\
&\le 3\,E\left(|X_0 - \hat{X}_0|^2\right) + 3\,t\,E\left(\int_0^t a^2 ds\right) + 3\,E\left((\int_0^t b^2 ds)\right)\\
&\le 3\,E\left(|X_0 - \hat{X}_0|^2\right) + 3(1+t)\left[E\left(\int_0^t a^2 ds\right) + E\left(\int_0^t b^2 ds\right)\right]\\
&\le 3\,E\left(|X_0 - \hat{X}_0|^2\right) + 3(1+t)\left[E\left(\int_0^t (a^2+b^2) ds\right)\right]\\
&\le 3\,E\left(|X_0 - \hat{X}_0|^2\right) + 3(1+t)\int_0^t E\left(a^2+b^2\right) ds\\
&\le 3\,E\left(|X_0 - \hat{X}_0|^2\right) + 3(1+t)\int_0^t E\left((2\cdot K_L)^2 |X_s - \hat{X}_s|^2\right) ds\\
&\le 3\,E\left(|X_0 - \hat{X}_0|^2\right) + 12(1+t)\,K_L^2 \int_0^t E\left(|X_s - \hat{X}_s|^2\right) ds.
\end{aligned}$$

Die Funktion $v(t) = E(|X_t - \hat{X}_t|)$ für $t \in [0,T]$ genügt der Ungleichung $v(t) \leq A + B \int_0^t v(s)ds$ mit $A = 3E\left[|X_0 - \hat{X}_0|\right]$ und $B = 12(1+t)\,K_L^2$.

Aus der Gronwall-Ungleichung (2.15) folgern wir: $v(t) \leq A \cdot \exp\{B\,t\}$.

Angenommen $X_0 = \hat{X}_0$, dann ist $A = 0$ und somit $v(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Wir schlußfolgern:

$$P\left(|X_t - \hat{X}_t| = 0 \text{ für alle } t \in \mathcal{Q} \cap [0,T]\right) = 1$$

wobei $\mathcal{Q}$ die Menge der ganzen Zahlen ist.

Aufgrund der Stetigkeit von $t \to |X_t - \hat{X}_t|$ folgt:

$$P\left(|X_1(\omega,t) - X_2(\omega,t)| = 0 \text{ für alle } t \in [0,T]\right) = 1$$

womit die Eindeutigkeit bewiesen wäre. ■

Wir wissen aus der Definition, dass jede starke Lösung eine schwache Lösung ist. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Die Eindeutigkeitsfunktion, die wir erhalten haben, wird oft auch *starke* oder *pfadweise* Eindeutigkeit genannt.
Mit der *schwachen Eindeutigkeit* ist gemeint, dass wenn zwei Lösungen identisch sind, sie eine gemeinsame endlich–dimensionale Verteilung haben.
Wir verweisen hier auf das Buch von [SV97] in dem auf die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen näher eingegangen wird.

Wir fassen zusammen:

Satz 2.8 Wenn μ und σ die Annahmen A1–A3 erfüllen, dann ist die Lösung (ob stark oder schwach) von der Gleichung (2.13) schwach eindeutig.

Für unsere lineare Gleichung (2.3) auf der Seite 20 existiert immer eine starke Lösung, da $\mu(x,t)$ und $\sigma(x,t)$ als lineare Funktionen die Annahmen A1–A3 erfüllen:
Mit $\mu(x,t) = \mu_1(t) + \mu_2(t) \cdot x$ und $\sigma(x,t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t) \cdot x$ gilt:

zu A1 $\mu(x,t)$ und $\sigma(x,t)$ sind messbar, da sie lineare Funktionen sind.

zu A2 Es gilt für alle $t \in [0,T]$ und $x, y \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} |\mu(x,t) - \mu(y,t)| &= |\mu_1(t) + \mu_2(t) \cdot x - \mu_1(t) - \mu_2(t) \cdot y| \\ &= |\mu_2(t) \cdot (x-y)| \\ &\leq |\mu_2(t)| \cdot |x-y| = K_L|x-y| \text{ mit } K_L > 0 \end{aligned}$$

Analog für $\sigma(x,t)$.

zu A3 Es gilt für alle $t \in [0,T]$ und $x, y \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} |\mu(x,t)| + \sigma(x,t)| &= |\mu_1(t) + \mu_2(t) \cdot x| + |\sigma_1(t) - \sigma_2(t) \cdot x| \\ &\leq |\mu_1(t) + \sigma_1(t)| + |(\mu_2(t) - \sigma_2(t)) \cdot x| \\ &\leq K_w + K_w \cdot |x| = K_w(1 + |x|) \text{ mit } K_w > 0 \end{aligned}$$

2.5 Eigenschaften der Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen

Nachdem wir bewiesen haben, dass die Lösung von stochastischen Differentialgleichungen existiert und eindeutig ist, werden wir einige Eigenschaften dieser Lösungen näher erläutern.

Die Lösung ist ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ auf unserem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, da $X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{B})$ mit $t \in [0,T]$, wobei $(M, \mathcal{B})$ ein geeigneter Messraum ist.

Bereits im vorangegangenen Abschnitt zeigten wir, dass X_t bezüglich $\mathcal{A}_t = \sigma(W_s : s \leq t)$ messbar ist. Das heißt, X_t ist an $\mathcal{A}_t$ adaptiert. Damit wissen wir, dass X_t von W_s mit $s \leq t$ abhängt und nicht von W_s mit $s > t$.

Wir wissen auch, das die Integrale $\int_0^t \mu(X_s, s)ds$ bzw. $\int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$ wohldefiniert sind als Riemann–Stieltjes– bzw. stochastisches Ito–Integral. Unter den Annahmen A1–A4 erfüllt $(X_t)_{t\in[0,T]}$ die Integralgleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s \tag{2.18}$$

eindeutig (P–fast sicher).

Die Lösung $(X_t)_{t\in[0,T]}$ bildet einen Markov-Prozess, denn für alle $n \in \mathcal{N}$, für alle $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$ im Intervall $[0,T]$ und für alle Zustände $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in M$ gilt:

$$P\left(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} \mid X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n\right) = P\left(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n\right).$$

Anschaulich bedeutet die Markov–Eigenschaft, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit für $X_s \in B$ mit $s > t \geq 0$ und $B \in \mathcal{B}$, gegeben die gesamte Vergangenheit des Prozesses bis zum Zeitpunkt t (mit $t < s$), d.h. unter der Bedingung der von X_r mit $0 \leq r < t$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(X_r : 0 \leq r < t)$, de facto von X_t abhängt.

Diese Eigenschaft nützt uns bei der Beschreibung des Kursverlaufes einer Aktie: Angenommen wir interessieren uns für den Kurs zum Zeitpunkt s mit $s > t \geq 0$, dann müssen wir nicht den gesamten Kursverlaufes zwischen 0 und t kennen, sondern den Kurs ab dem Zeitpunkt t.

Der Vollständigkeit halber bemerken wir, dass der Markov-Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ mit stetigen Pfaden $t \mapsto X_t$ ein Diffusionsprozess mit Driftterm $\mu(x,t)$ und dem sogenannten Diffusionskoeffizienten $\sigma(x,t)$ ist, da folgende drei Punkte erfüllt sind:

1. $\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} P\left(|X_{t+\Delta} - X_t| > \epsilon \mid X_t = x\right) = 0$ für $\epsilon > 0$. Das bedeutet, dass die Lösung sich in einem sehr kleinen Zeitintervall Δ nicht sehr weit von der Ortskoordinate x entfernt. Den Term können wir auch umschreiben:$P\left(|X_{t+\Delta} - X_t| > \epsilon \mid X_t = x\right) = o(\Delta)$ mit dem Landauschen Symbol $o(\Delta)$.

2. $\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E\left(|X_{t+\Delta} - X_t| > \epsilon \mid X_t = x\right) = \mu(x,t)$. In Worten: Der Erwartungswert des Zuwachses $X_{t+\Delta} - X_t$ unter der Voraussetzung, dass $X_t = x$ ist gegeben durch $\mu(x,t) \cdot \Delta$.

3. Analoges gilt auch für den zweiten Moment: $\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E\left(|X_{t+\Delta} - X_t|^2 > \epsilon \mid X_t = x\right) = \sigma^2(x,t)$

Mit diesen Eigenschaften beenden wir das Kapitel 2. Die technischen Grundlagen sind geschaffen, um die spezielle stochastische Differentialgleichung nämlich die Black-Scholes-Gleichung herzuleiten und zu untersuchen.

Kapitel 3

Das Black-Scholes-Modell

In diesem Kapitel stehen die finanzwissenschaftlichen Instrumente im Vordergrund. Wir stellen das Black-Scholes-Modell auf und leiten daraus die Black-Scholes-Formel ab. Dabei halten wir uns sehr stark an das Buch [BR98].

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Unser Ausgangspunkt ist ein Portfolio $(\phi,\, \psi) = (\phi_t,\, \psi_t : t \geq 0)$, das heißt eine Gesamtheit der Wertpapieranlagen einer Person oder Gesellschaft[1].

Unser Depot[2] bestehe damit aus ϕ_t Anteilen an Aktie zum Zeitpunkt t und ψ_t Anteilen an Bonds, dass sind festverzinsliche Wertpapiere, zum Zeitpunkt t. Dabei bildet $(\phi,\, \psi)$ einen stochastischen Prozesse. Die Sicherheitskomponente des Portfolios $\psi = (\psi_t : t \geq 0)$ ist bezüglich einer Filtration $\mathcal{F}$-vorhersehbar, das heißt sie ist abhängig von Informationen bis zur Zeit t, aber nicht von t selber. Der Prozess ψ ist an die Filtration $\mathcal{F}$ adaptiert.

Der Wert eines Portfolios berechnet sich aus dem Preis der Aktie S_t und dem Preis des Bonds B_t:

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t. \tag{3.1}$$

[1] vergleich [SVR]

[2] "Die Bezeichnung 'Depot' stammt vom lateinischen Wort 'depositum' und bedeutet soviel wie 'das Hinterlegte' oder 'das jemandem zur Verwahrung Übergebene'. Im Bankgeschäft dient ein Depot vor allem dazu die Vermögenswerte des Kunden sicher aufzubewahren, z. B. Wertpapiere, Edelmetalle, Schmuck, Gemälde und andere wertvolle Gegenstände." [SVR]

Wir benötigen zuerst eine Prozess, der den Aktienkurs wirklichkeitsnah nachbildet. Für eine beliebige Forderung[3] X (mit dem Zeithorizont T) werden wir eine replizierende Strategie (ϕ_t, ψ_t) finden. Doch vorerst brauchen wir einige wichtige Definitionen.

Definition 3.1 (Selbstfinanzierendes Portfolio) Sei (ϕ_t, ψ_t) ein Portfolio zum Zeitpunkt t mit Aktienpreis S_t und Bondpreis B_t, dann ist (ϕ_t, ψ_t) ein selbstfinanzierendes Portfolio genau dann, wenn $dV_t = \phi_t\, dS_t + \psi_t\, dB_t$. Das ist eine stochastische Differentialgleichung mit dem "zufälligen Anteil" S_t.

Definition 3.2 (Replizierende Strategie) Eine replizierende Strategie für eine Forderung X ist ein selbstfinanzierendes Portfolio (ϕ_t, ψ_t), so dass $\int_0^T \sigma_t^2 \phi_t^2 dt < \infty$ und $V_T = \phi_T\, S_T + \psi_T\, B_T = X$.

Falls wir eine replizierende Strategie für eine beliebige Forderung X finden, können wir leicht den Preis der Forderung ausrechnen.

3.1 Das Modell

In unserer Ausgangssituation sei der Bondpreis B_t gegeben durch

$$B_t = \exp\{rt\} \tag{3.2}$$

und der Aktienpreis S_t durch

$$S_t = S_0\, \exp\{\sigma W_t + \mu t\}. \tag{3.3}$$

wobei r der risikolose Zinssatz, σ die Volatilität der Aktie und μ die Drift der Aktie beschreiben.

Wir nehmen an, dass es keine Transaktionskosten gibt, und sowohl die Aktie als auch das Bond seien frei verfügbare Instrumente. Außerdem seien Arbitragemöglichkeiten[4] verboten.

Gesucht ist ein geeignetes Modell zur Verhaltensbeschreibung der Aktie. Wir betrachten zwei Fälle: In dem ersten Fall nehmen wir an, dass die Zinsrate gleich Null ist, und im zweiten, dass sie größer Null ist.

[3] "... juristisch das Recht eines Gläubigers gegenüber dem Schuldner auf Erfüllung einer Leistung."[Wol96]

[4] " ... Arbitrage ... Ausnutzen von Kurs- oder Preisunterschieden eines Wertgegenstandes an örtlich verschiedenen Märkten, indem man im gleichen Zeitpunkt eine Sache dort kauft, wo sie billig ist, und sie dort verkauft, wo sie teuer ist."[SVR]

3.2 Eine Zinsrate von Null

Angenommen: $r = 0$. Dann ist der Bondpreis konstant $B_t = 1$. Um die replizierende Strategie zu finden, gehen wir in drei Schritten vor.

1. Schritt:

Finde ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q, so dass S_t ein Martingal ist.

Gehen wir wie Paul Samuelson (1965) davon aus, dass der Aktienkurs einer geometrisch Brownschen Bewegung folgt:

$$S_t = f(t, W_t) = \exp\{\sigma W_t + \mu t\}. \tag{3.4}$$

Mit den partiellen Abteilungen

$$f(t,x) = e^{\sigma\, x + \mu\, t},\ f_1(t,x) = \mu\, f(t,x),\ f_2(t,x) = \sigma\, f(t,x),\ f_{22} = \sigma^2\, f(t,x)$$

Dann folgt mit Formel (1.10) auf Seite 17:

$$\begin{aligned}
& f(t, W_t) = f(0, W_0) = S_t - S_0 \\
= & \int_0^t \left(f_1(x, W_x) + \frac{1}{2} f_{22}(x, W_x) \right) dx + \int_0^t f_2(x, W_x) dW_x \\
= & \int_0^t \left(\mu f(x, W_x) + \frac{1}{2} \sigma^2 f(x, W_x) \right) dx + \int_0^t \sigma f(x, W_x) dW_x \\
= & \int_0^t \left(\mu S_x + \frac{1}{2} \sigma^2 S_x \right) dx + \int_0^t \sigma S_x dW_x
\end{aligned}$$

Und damit:

$$dS_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{3.5}$$

Um S_t die Martingaleigenschaft nachzuweisen, müssen wir versuchen, die Driftkomponente zu eliminieren. Wir definieren dazu einen Prozess γ_t mit konstanten Werten $\gamma = \frac{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$ und wenden den Satz von Cameron-Martin-Girsanov[5] an, der da lautet:

[5] vergleich dazu [BR98], auf der Seite 74

Satz 3.3 (von Cameron-Martin-Girsanov) Seien W_t eine Brownsche Bewegung bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß P und γ_t ein Prozess, der an seine natürliche Filtration $\mathcal{F}$ adaptiert ist. Wenn $E_P\left(exp\{\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s^2 ds\}\right) < \infty$ erfüllt ist, dann gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q, so dass

1. Q ist äquivalent zu P, das heißt $Q(A) = P(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$;
2. $\frac{dQ}{dP} = exp\left\{-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right\}$;
3. $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ ist eine Brownsche Bewegung bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q.

Es gibt also ein Maß Q, so dass

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$$

und damit gilt:

$$d\tilde{W}_t = dW_t + \gamma_t dt.$$

Daraus folgern wir:

$$\begin{aligned} dS_t &= \sigma S_d\, dW_t + \underbrace{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}_{=\gamma\,\sigma} S_t dt \\ &= \sigma S_t\,(dW_t + \gamma dt) \\ &= \sigma S_t\, d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Da $\tilde{W}_t$ eine Brownsche Bewegung beschreibt, also ein Wiener–Prozess ist, ist S_t ein Martingal. Im Buch [BR98] auf der Seite 79 finden wir das Lemma, welches diesen Sachverhalt besser beschreibt.

Lemma 3.4 Sei $dS_t = \sigma_t S_t\, dW_t$ und σ_t $\mathcal{F}$- vorhersehbar. Dann gilt:

$$E\left(exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^2 ds\right\}\right) < \infty \Longrightarrow S_t \text{ ist ein Martingal.}$$

Damit ist unser S_t ein Martingal bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q.

2. Schritt:

Finde einen geeigneten Prozess N_t mit $N_t = E_Q(X|\mathcal{F}_t)$, wobei X die Forderung ist.

Sei $N_t = E_Q(X|\mathcal{F}_t)$. Dann ist N_t ein Martingal bezüglich Q, denn mit $s \leq t$ gilt:

$$\begin{aligned} E_Q(N_t|\mathcal{F}_s) &= E_Q(E_Q(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) \\ &= E_Q(X|\mathcal{F}_s) = N_s. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Wir haben zwei Martingale bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q: N_t und S_t.

3. Schritt:

Finde einen $\mathcal{F}$-vorhersehbaren Prozess ϕ_t, so dass $dN_t = \phi_t dS_t$ ist.

Dazu brauchen wir folgenden Satz[6]:

Satz 3.5 (Martingal–Darstellung–Satz) Sei M_t ein Martingal–Prozess bezüglich Q, so dass die Volatilität $\sigma_t \neq 0$ (Q–fast sicher) ist.
Ist N_t ein anderes Q–Martingal, dann existiert ein $\mathcal{F}$–vorhersehbarer Prozess ϕ, so dass $\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty$ (Q–fast sicher) und

$$N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s dM_s. \tag{3.7}$$

Daraus folgt mit $N_t = E_Q(X|\mathcal{F}_t) = E_Q(X) + \int_0^t \phi_s dS_s$, dass $dN_t = \phi_t dS_t$ mit ϕ_t ein $\mathcal{F}$-vorhersehbarer Prozess.

Haben wir eine replizierende Strategie vorliegen?

Wir haben ϕ_t Anteile an Aktien und $\psi_t = N_t - \phi_t S_t$ Anteile an Bonds und werden zeigen, dass (ϕ_t, ψ_t) eine replizierende Strategie ist.

[6] vergleich [BR98], Seite 78

(ϕ_t, ψ_t) ist eine selbstfinanzierende Strategie, denn mit $N_t =: V_t$ folgt:

$$dV_t =: dN_t = \phi_t dS_t = \phi_t dS_t + \left(\psi_t \underbrace{dB_t}_{=0,\text{ da } r=0} \right).$$

Weiterhin gilt mit dem Martingal-Darstellungsatz, dass $\int_0^T \sigma_t^2 \phi_t^2 dt < \infty$ ist. Daraus folgt:

$$V_t =: N_t = \phi_t S_t + \psi_t \underbrace{B_t}_{=1}.$$

Wir haben eine replizierende Strategie für X mit $X = N_t$ entwickelt. Damit kennen wir den arbitragefreien Preis zu jedem Zeitpunkt t, insbesondere zur Zeit Null: $N_0 = E_Q(X)$.

3.3 Eine positive Zinsrate

Im Fall $r > 0$ betrachten wird den Prozess $Z_t = B_t^{-1} S_t$. Dieser Prozess ist diskontiert[7], da wir den Prozess zum Zeitpunkt t im Anfangszeitpunkt 0 betrachten. Damit gilt $dZ_t = Z_t \left(\sigma dW_t + \left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt \right)$.

Auch hier gehen wir genauso vor wie im Fall $r = 0$:

1. Um ein Maß Q zu finden, unter dem Z_t ein Martingal ist, wenden wir erneut den Cameron-Martin-Girsanov-Satz an (mit Drift $\gamma = \frac{\left(\mu - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}$). Damit existiert ein Maß Q, welches äquivalent zu dem Originalmaß P ist, und ein Wiener Prozess (bezüglich Q) $\tilde{W}_t$, so dass

   $$dZ_t = \sigma Z_t d\tilde{W}_t.$$

   Also ist Z_t "Drift"-los und damit ein Martingal bezüglich Q, da der Wiener Prozess $\tilde{W}_t$ ein Martingal ist.

[7] "... diskontieren ... Zinsen abziehen zur Bestimmung des Gegenwartswertes einer zukünftigen Zahlung." [SVR]

2. Der gebildete Prozess $N_t = E_Q(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)$ ist auch ein Martingal bezüglich Q. (Vergleichen wir dazu die Begründung (3.6).)

3. Mit dem Martingal-Darstellungssatz haben wir einen $\mathcal{F}$-vorhersehbaren Prozess ϕ_t, so dass $dN_t = \phi_t dZ_t$.

Der Bondanteil in der diskontierten Welt ist $\psi_t = N_t - \phi_t Z_t$. Im Endzeitpunkt T gilt: $\phi_T S_T + \psi_T B_T = B_T N_T = X$. Der Wert V_t des Portfolio (ϕ_t, ψ_t) ist gegeben durch $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = B_t N_t$. Wenden wir darauf die Produktregel an, folgt:

$$\begin{aligned}
dV_t &= B_t dN_t + N_t dB_t \\
(\text{ mit } dN_t = \phi_t dZ_t) &= B_t \phi_t dZ_t + N_t dB_t \\
(\text{ mit } N_t = \psi_t + \phi_t Z_t) &= B_t \phi_t dZ_t + (\psi_t + \phi_t Z_t) dB_t \\
&= \phi_t (B_t dZ_t + Z_t dB_t) + \psi_t dB_t \\
&= \phi_t d(B_t Z_t) + \psi_t dB_t \\
&= \phi_t dS_t + \psi_t dB_t.
\end{aligned}$$

Damit ist das Portfolio (ϕ_t, ψ_t) selbstfinanzierend. Mit $V_t = X$ haben wir gezeigt, dass (ϕ_t, ψ_t) eine replizierende Strategie ist.

3.4 Zusammenfassung

In dem Black-Scholes-Modell mit konstanten r, μ, σ und Preisen, die durch $S_t = S_o \exp\{\sigma W_t + \mu t\}$ und $B_t = exp\{rt\}$ gekennzeichnet sind, können wir alle Forderungen X (zum Endzeitpunkt T) mit $E|X| < \infty$ mit einer replizierenden Strategie identifizieren. Der arbitragefreie Preis zum Zeitpunkt t ist gegeben durch:

$$V_t = B_t N_t = B_t \cdot E_Q(B_T^{-1} X|\mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} \cdot E_Q(X|\mathcal{F}_t), \tag{3.8}$$

wobei Q das Martingalmaß für die diskontierte Aktie $B_t^{-1} S_t$ ist.

3.5 Black-Scholes-Formel

Betrachten wir als Forderung den Preis einer europäischen Call–Option[8]..

[8]Eine Long–Call–Option (Short–Call–Option) ist das Recht, aber nicht die Pflicht, eine Aktie zu einem vorher festgelegtem Betrag, dem sogenanntem Strikepreis K, zu einem

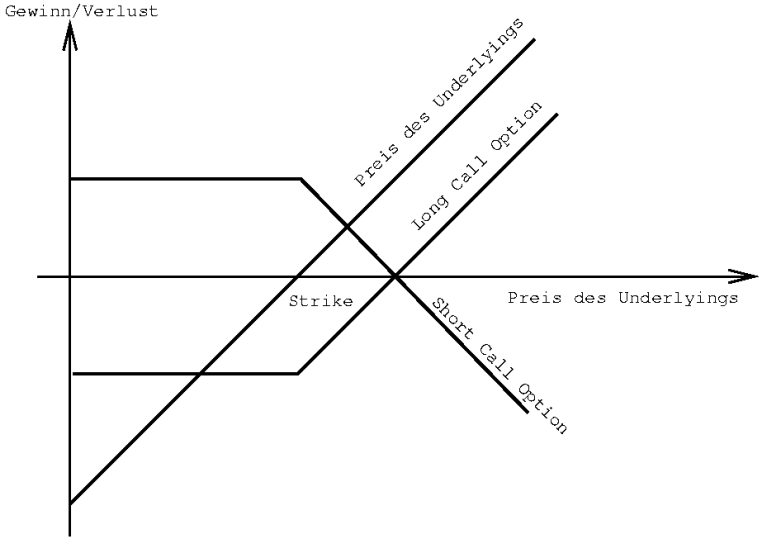

Abbildung 3.1: Zusammenhang zwischen dem Gewinn und dem Aktienkurs zum Endzeitpunkt T einer Short– und eine Long–Call–Option.

Die Auszahlungsfunktion lautet: $X = \max\{S_T - K; 0\} = (S_T - K)^+$. Mit der Formel (3.8) können wir den Wert der Option zum Anfangszeitpunkt bestimmen: $V_t = e^{-rT} E_Q(\max\{S_T - K; 0\})$. Dabei gilt für die Aktie:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma \tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right\},$$

wobei $\tilde{W}_t$ eine Brownsche Bewegung bezüglich Q ist und somit normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz T ist.

Wir wissen[9], dass S_T lognormalverteilt mit Erwartungswert $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T$ und Varianz $\sigma^2 T$ ist.

Mit eine Zufallsvariable Z, für die gilt $Z \sim N(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$ können wir S_T schreiben als $S_T = S_0 \exp\{Z + rT\}$. Und somit gilt:

$$V_0 = e^{-rT} E((S_0 \exp\{Z + rT\} - K)^+)$$

bestimmten Zeitpunkt T zu kaufen (verkaufen). Vergleich dazu Bild 3.1.

[9]Vergleich [FHH], Seite 36ff.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \cdot \int_{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)-rT}^{\infty} \left(S_0 e^x - K e^{-rT}\right) \exp\left\{-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx$$

Da die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung gleich

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy$$

ist, gilt:

$$\begin{aligned} V_0 &= V(s,T) \\ &= S_0 \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Diese Formel ist unter dem Begriff Black-Scholes-Formel bekannt.

3.6 Anwendungsbeispiel

Gegeben sei ein Call auf eine Aktie ohne Dividendenzahlung mit einem Basispreis von 50,- Euro und einer Restlaufzeit von 4 Monaten. Der gegenwärtige Aktienkurs sei 51,- Euro und der risikolose (kontinuierliche) Zinssatz 5 Prozent p.a. Die Volatilität der Aktie betrage 25 Prozent.
Gegeben sind:

$$K = 50, \qquad T = \frac{4}{12}, \qquad S_0 = 51, \qquad r = 0.05, \qquad \sigma = 0.25.$$

Aus der Black–Scholes–Formel folgt:

$$\begin{aligned} V_0 &= S_0 \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= S_0 \Phi\left(\frac{\ln\frac{51}{50} + \left(0.05+\frac{1}{2}0.25^2\right)\frac{4}{12}}{0.25\sqrt{\frac{4}{12}}}\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln\frac{51}{50} + \left(0.05-\frac{1}{2}0.25^2\right)\frac{4}{12}}{0.25\sqrt{\frac{4}{12}}}\right) \\ &= 51\Phi(0.32) - 50 e^{\left(-0.05\,\frac{4}{12}\right)} \Phi(0.18) \\ &= 51 \cdot 0.6255 - 50 e^{\left(-0.05\,\frac{4}{12}\right)} 0.5714 = 31.34 \end{aligned}$$

Die Call–Option ist zum jetztigen Zeitpunkt 31.34 Euro wert.

Kapitel 4

Approximationsverfahren

In diesem Abschnitt werden wir verschiedene Approximationsverfahren vorstellen, erläutern, implementieren und bewerten. Unsere Ausgangsgleichung ist eine lineare Differentialgleichung.

4.1 Die Euler–Maruyama–Approximation

Eines der einfachsten zeitdiskreten Approximationen von Ito-Prozessen ist das Euler–Maruyama–Approximationsverfahren.

Betrachten wir den Ito-Prozess $X = (X_t : t \in [0, T])$, für den folgende stochastische Differentialgleichung erfüllt ist:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{4.1}$$

auf dem Intervall $[0, T]$ mit dem Anfangswert X_0, wobei $W = (W_t : t \in [0, T])$ der Wiener–Prozess ist.

Definition 4.1 Für eine gegebene Intervallzerlegung $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ des Zeitintervalls $[0, T]$ ist die Euler–Maruyama–Approximation ein stochastischer Prozess $Y = (Y_t : t \in [0, T])$, für den gilt:

$$Y(t_{i+1}) = Y_{i+1}$$

mit

$$Y_{i+1} = Y_i + \mu(t_i, Y_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, Y_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

für $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ und dem Anfangswert $Y_0 = X_0$.

Wir bezeichnen den i–ten Zuwachs mit $\triangle_i = t_{i+1} - t_i$ und $\delta_n = \max_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1})$ als maximale Schrittgröße. In diesem Abschnitt gehen wir von äquidistante Intervallzerlegung aus, das heißt $t_i = t_0 + i\,\delta$, wobei $\delta = \triangle_i = \triangle = \frac{T-t_0}{n}$ für jedes entsprechende n, so dass $\delta \in (0,1)$. Weiterhin vereinfachen wir im folgenden unser Intervall $[0,T]$ auf $[0,1]$.

Richten wir unseren Blick auf die lineare stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \mu\, X_t\, dt + \sigma\, X_t\, dW_t \tag{4.2}$$

für $t \in [0,1]$ und $X_0 \in \mathcal{R}$. Wie wir bereits gezeigt haben, hat diese Gleichung die eindeutige Lösung:

$$X_t = X_0\ \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma\, W_t\right\} \tag{4.3}$$

Da wir die eindeutige Lösung kennen, haben wir die Möglichkeit die Approximation mit der expliziten Lösung zu vergleichen, um den Fehler zu berechnen.

Die einzelnen Werte berechnen sich folgendermaßen:

i	Lösung zum Zeitpunkt i	Approximationswert zum Zeitpunkt i
0	X_0	Y_0
1	$X_1 = X_0\ \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{n} + \sigma\, W_{\frac{1}{n}}\right\}$	$Y_1 = Y_0 + \mu\, Y_0\ \frac{1}{n} + \sigma\, Y_0\left(W_{\frac{1}{n}} - W_0\right)$
2	$X_2 = X_0\ \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{2}{n} + \sigma\, W_{\frac{2}{n}}\right\}$	$Y_2 = Y_1 + \mu\, Y_1\ \frac{1}{n} + \sigma\, Y_1\left(W_{\frac{2}{n}} - W_{\frac{1}{n}}\right)$
...	...	...
n	$X_n = X_0\ \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma\, W_1\right\}$	$Y_n = Y_{n-1} + \mu\, Y_{n-1}\ \frac{1}{n} + \sigma\, Y_{n-1}\left(W_{\frac{n}{n}} - W_{\frac{n-1}{n}}\right)$

Das Bild 4.1 zeigt verschiedene Realisierungen der Euler–Approximation und der exakten Lösung im Intervall $[0,1]$ und eine Vergrößerung auf $[0.3, 0.35]$. Wir sehen deutlich, dass sich die Approximation der exakten Lösung annähert mit wachsender Anzahl an Realisierungen.

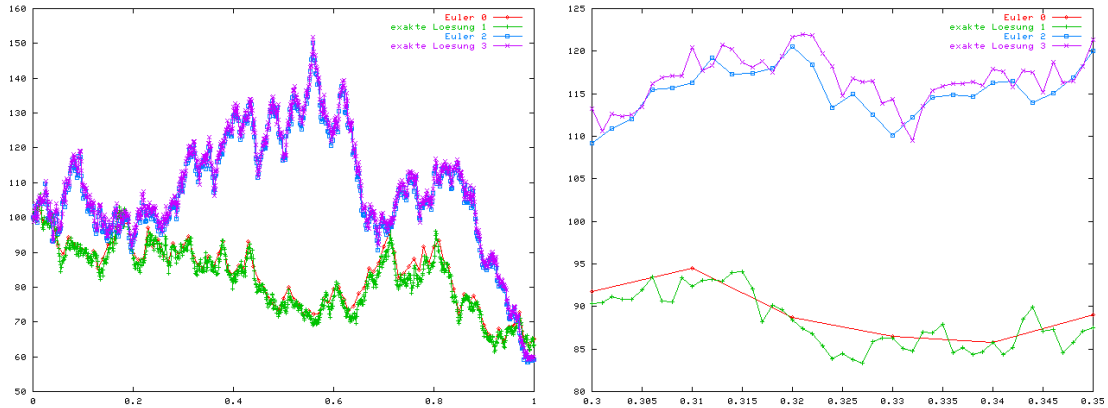

Abbildung 4.1: Die Euler–Approximation im Vergleich mit der exakten Lösung, mit $n = 100$ und $n = 500$ Realisierungen, $\mu(Y_{i-1}) = 0.01\,Y_{i-1}$, $\sigma(Y_{i-1}) = 0.5\,Y_{i-1}$ sowie $Y_0 = 100$ im Intervall $[0, 1]$ und eine Vergrößerung auf $[0.3, 0.35]$. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.)

4.2 Die Milstein–Approximation

Die Milstein–Approximation ist eine Weiterentwicklung der Euler–Approximation.

Bevor wir anfangen nehmen wir die stochastische Differentialgleichung:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dW_s, \qquad t \in [0, 1]$$

in Augenschein.

Für die Punkte t_i der Intervallzerlegung τ_n untersuchen wir die Differenz $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ und erhalten:

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mu(X_s)\,ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s)\,dW_s, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Die Euler–Approximation beruht auf der Diskretisierung der Integrale in Gleichung (4.4). Die Milstein–Approximation nutzt die sogenannte Taylor–Ito–Entwicklung aus. Das heißt auf die Funktionen $\mu(X_s)$ und $\sigma(X_s)$ wird die 2. Auslegung des Ito–Lemmas (Gleichung (1.12) auf der Seite 18) angewendet.

Sei $f(t, X_t) = \mu(X_t)$, dann gilt für die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f_1 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial X_t} = f_2 = \mu'(X_t) =: \mu', \qquad \frac{(\partial f)^2}{\partial X_t^2} = f_{22} = \mu''(X_t) =: \mu''.$$

Machen wir uns die 2. Auslegung des Ito–Lemmas zu nutzen für $t_{i-1} < s < t_i$, so folgt:

$$\begin{aligned} f(s, X_s) - f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) &= \mu(X_s) - \mu(X_{t_{i-1}}) \\ &= \int_{t_{i-1}}^{s} \left(\mu(X_y)\, \mu' + \frac{1}{2}\sigma(X_y)^2\, \mu'' \right) dy + \int_{t_{i-1}}^{s} \sigma(X_y)\, \mu'\, dW_y. \end{aligned}$$

Analog bedeutet das für $\sigma(X_s)$ mit $t_{i-1} < s < t_i$:

$$\begin{aligned} f(s, X_s) - f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) &= \sigma(X_s) - \sigma(X_{t_{i-1}}) \\ &= \int_{t_{i-1}}^{s} \left(\mu(X_y)\, \sigma' + \frac{1}{2}\sigma(X_y)^2\, \sigma'' \right) dy + \int_{t_{i-1}}^{s} \sigma(X_y)\, \sigma'\, dW_y. \end{aligned}$$

Setzen wir für $\mu(X_s)$ und $\sigma(X_s)$ die umgestellten Gleichungen in (4.4) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} X_{t_i} &- X_{t_{i-1}} \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\mu(X_{t_{i-1}}) + \int_{t_{i-1}}^{s} \left(\mu(X_y)\, \mu' + \frac{1}{2}\sigma(X_y)^2\, \mu'' \right) dy + \int_{t_{i-1}}^{s} \sigma(X_y)\, \mu'\, dW_y \right) ds \\ &+ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\sigma(X_{t_{i-1}}) + \int_{t_{i-1}}^{s} \left(\mu(X_y)\, \sigma' + \frac{1}{2}\sigma(X_y)^2\, \sigma'' \right) dy + \int_{t_{i-1}}^{s} \sigma(X_y)\, \sigma'\, dW_y \right) dW_s. \end{aligned}$$

Die Änderung $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ ist approximativ[1]:

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \mu(X_{t_{i-1}})\, \triangle_i + \sigma(X_{t_{i-1}})\, \triangle_i W + \text{Rest},$$

wobei

$$\begin{aligned} \text{Rest} = &\underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} \sigma\, \sigma'\, dW_y \right) dW_s}_{=:R_i} \\ &+ \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} \left(\mu\, \mu' + \frac{1}{2}\sigma^2 \mu'' \right) dy + \int_{t_{i-1}}^{s} \sigma\, \mu'\, dW_y \right) ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} \left(\mu\, \sigma' + \frac{1}{2}\sigma^2 \sigma'' \right) dy \right) dW_s}_{\text{vernachlässigbar klein}}. \end{aligned}$$

[1] Wir verwenden: $\triangle_i = t_i - t_{i-1}$ und $\triangle_i W = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$).

Untersuchen wir R_i genauer. Das Doppelintegral in R_i ist annährerungsweise:

$$R_i \approx \sigma(X_{t_{i-1}})\,\sigma'(X_{t_{i-1}}) \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} dW_y \right) dW_s}_{=:I}$$

Wir verbessern R_i, indem wir das Doppelintegral elimieren. Untersuchen wir dazu $(\triangle_i W)^2$:

$$\begin{aligned}
(\triangle_i W)^2 &\approx \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} dW_s \right) \cdot \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} dW_y \right) \\
&= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} dW_y \right) dW_s \\
&= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} dW_y + \int_{s}^{s} dW_y + \int_{s}^{t_i} dW_y \right) dW_s \\
&= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} dW_y \right) dW_s + \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} (dW_s)^2}_{\approx \triangle_i} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{s}^{t_i} dW_y \right) dW_s
\end{aligned}$$

Da:

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} dW_y \right) dW_s &\approx \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{s}^{t_i} dW_y \right) dW_s = I \\
\text{gilt: } (\triangle_i W)^2 &\approx 2 \cdot I + \triangle_i \\
\text{bzw. } I &\approx \frac{1}{2} \left((\triangle_i W)^2 - \triangle_i \right) \\
\text{und somit: Rest} &\approx \frac{1}{2} \sigma(X_{t_{i-1}})\,\sigma'(X_{t_{i-1}}) \left((\triangle_i W)^2 - \triangle_i \right) \\
\text{das heißt: } X_{t_i} - X_{t_{i-1}} &\approx \mu(X_{t_{i-1}})\,\triangle_i + \sigma(X_{t_{i-1}})\,\triangle_i W + \frac{1}{2} \sigma(X_{t_{i-1}})\,\sigma'(X_{t_{i-1}}) \left((\triangle_i W)^2 - \triangle_i \right).
\end{aligned}$$

Wir definieren diese Approximation als Milstein–Approximation.

Definition 4.2 Für eine gegebene Intervallzerlegung $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ des Zeitintervalls $[0, T]$ ist die Milstein–Approximation ein stochastischer Prozess $X = (X_t : t \in [0, T])$, für den gilt:

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \mu(X_{t_{i-1}})\,\triangle_i + \sigma(X_{t_{i-1}})\,\triangle_i W + \frac{1}{2} \sigma(X_{t_{i-1}})\,\sigma'(X_{t_{i-1}}) \left((\triangle_i W)^2 - \triangle_i \right)$$

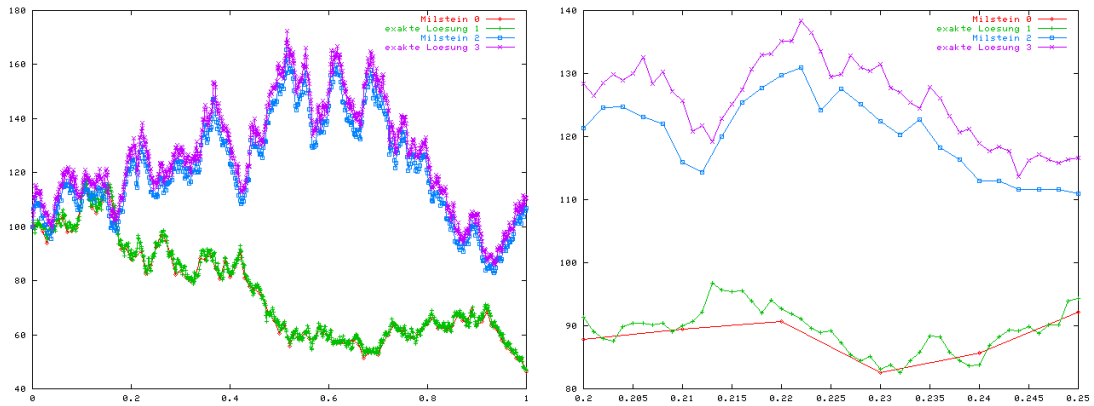

Abbildung 4.2: Die Milstein–Approximation im Vergleich mit der exakten Lösung, mit $n = 100$ und $n = 500$ Realisierungen, $\mu(X_{t_{i-1}}) = 0.01\, X_{t_{i-1}}$, $\sigma(X_{t_{i-1}}) = 0.5\, X_{t_{i-1}}$ sowie $X_0 = 100$ im Interval $[0, 1]$ und eine Vergrößerung auf $[0.2, 0.25]$. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.)

für $i = 1, 2, \ldots, n$ und dem Anfangswert X_0, der identisch ist mit dem Anfangswert der Ausgangsgleichung (4.1).

Die Abbildung 4.2 zeigt den Unterschied zwischen der exakten Lösung und der Milstein–Approximation im Intervall $[0, 1]$ und eine Vergrößerung auf $[0.2, 0.25]$. Auch hier sehen wir deutlich, dass mit einer wachsenden Anzahl an Realisierungen, sich die Annäherung verbessert.

4.3 Die Taylor–Approximation 1,5–ter Ordnung

Im Abschnitt 4.2 wenden wir auf die Gleichung (1.8) die Taylor–Ito–Entwichlung an und erhalten:

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mu(X_s)\, ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s)\, dW_s + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} \sigma\, \sigma'\, dW_y \right) dW_s, \tag{4.5}$$

für $i = 1, \ldots, n$.
Werten wir diese Gleichung erneut mit der Taylor–Ito–Entwicklung aus, so

erhalten wir die Taylor–Approximation:

Definition 4.3 Für eine gegebene Intervallzerlegung $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ des Zeitintervalls $[0, T]$ ist die Taylor–Approximation ein stochastischer Prozess $X = (X_t : t \in [0, T])$, für den gilt:

$$\begin{aligned} X_{t_i} &= X_{t_{i-1}} + \mu(X_{t_{i-1}})\,\triangle_i + \sigma(X_{t_{i-1}})\,\triangle_i W \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma(X_{t_{i-1}})\,\sigma'(X_{t_{i-1}})\left((\triangle_i W)^2 - \triangle_i\right) \\ &\quad + \mu'(X_{t_{i-1}})\sigma(X_{t_{i-1}})\,\triangle_i Z + \frac{1}{2}\left(\mu(X_{t_{i-1}})\mu'(X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_{t_{i-1}})\mu''(X_{t_{i-1}})\right)\triangle_i{}^2 \\ &\quad + \left(\mu(X_{t_{i-1}})\sigma'(X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_{t_{i-1}})\sigma''(X_{t_{i-1}})\right)\cdot(\triangle_i W \triangle_i - \triangle_i Z) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma(X_{t_{i-1}})\left(\sigma(X_{t_{i-1}})\sigma''(X_{t_{i-1}}) + (\sigma'(X_{t_{i-1}}))^2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}(\triangle_i W)^2 - \triangle_i\right)\triangle_i W \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ und dem Anfangswert X_0, der identisch ist mit dem Anfangswert der Ausgangsgleichung (4.1).
Die zusätzliche Zufallsvariable $\triangle_i Z$ repräsentiert das Doppelintegral:

$$\triangle_i Z = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} dW_y\right) ds.$$

Die Abbildung 4.3 zeigt den Unterschied zwischen der exakten Lösung und der Taylor–Approximation auf dem Intervall $[0, 1]$ und eine Vergrößerung auf $[0.75, 0.83]$.

4.4 Bewertung der Approximationsmethoden

4.4.1 Direkter Vergleich

Einen ersten Vergleich können wir an Hand der graphischen Darstellungen anstellen.

Betrachten wir zuerst die Milstein– und die Euler–Approximation in der Abbildung 4.4.

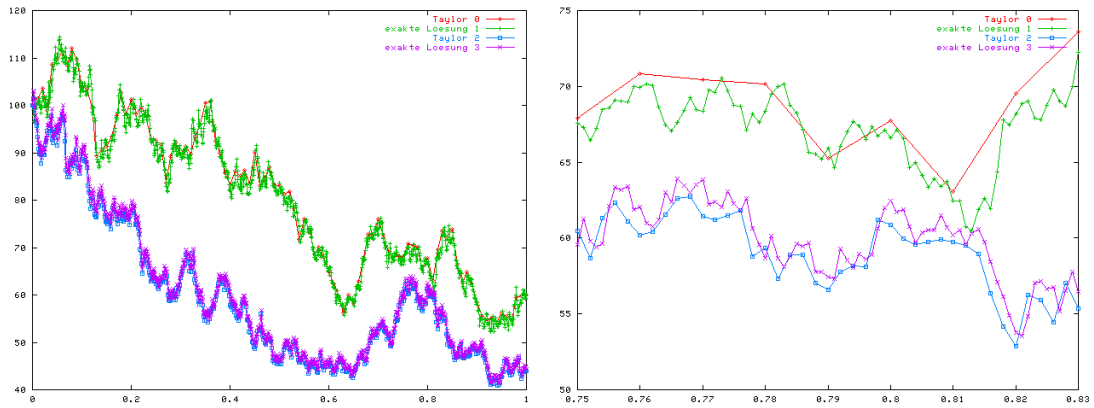

Abbildung 4.3: Die Taylor–Approximation im Vergleich mit der exakten Lösung, mit $n = 100$ und $n = 500$ Realisierungen, $\mu(X_{t_{i-1}}) = 0.01\, X_{t_{i-1}}$, $\sigma(X_{t_{i-1}}) = 0.5\, X_{t_{i-1}}$ sowie $X_0 = 100$ auf dem Intervall $[0, 1]$ und eine Vergrößerung auf $[0.75, 0.83]$. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.)

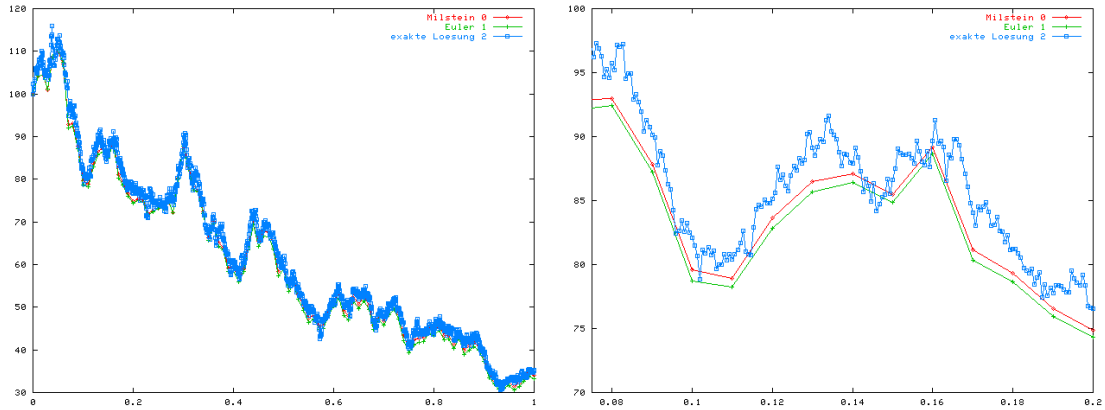

Abbildung 4.4: Die Euler– und die Milstein–Approximation im Vergleich mit der exakten Lösung, mit $n = 100$ Realisierungen, $\mu(X_{t_{i-1}}) = 0.01\, X_{t_{i-1}}$, $\sigma(X_{t_{i-1}}) = 0.5\, X_{t_{i-1}}$ sowie $X_0 = 100$. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.)

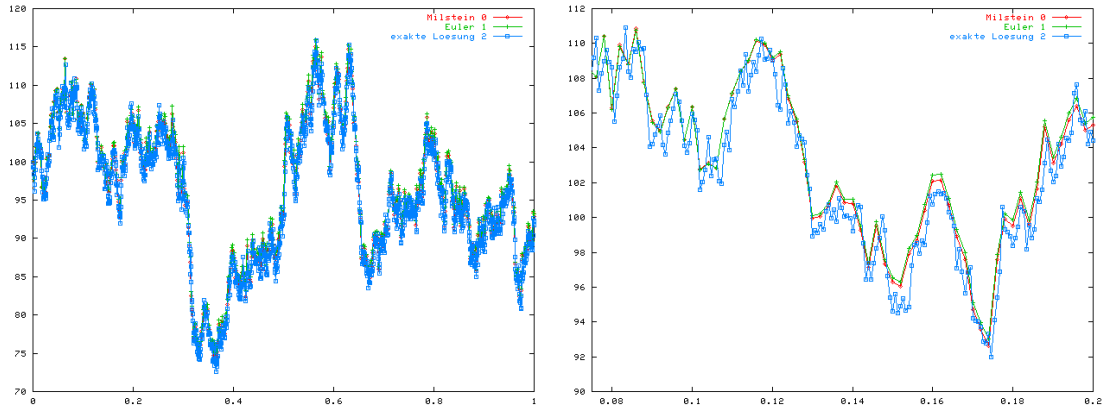

Abbildung 4.5: Die Euler– und die Milstein–Approximation im Vergleich mit der exakten Lösung, mit $n = 500$ Realisierungen, $\mu(X_{t_{i-1}}) = 0.01\, X_{t_{i-1}}$, $\sigma(X_{t_{i-1}}) = 0.5\, X_{t_{i-1}}$ sowie $X_0 = 100$. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.)

Erhöhen wir die Anzahl der Realsierungen der Approximationen, so sehen[2] wir genauer, dass die Milstein–Approximation eine bessere Annäherungsmethode ist.

Untersuchen wir das Approximationsverhalten der Taylor–Methode versus dem Milstein– und Euler–Verfahren. Wir verändern die Parameter: $\mu(X_{t_{i-1}}) = 1\, X_{t_{i-1}}$, $\sigma(X_{t_{i-1}}) = 3\, X_{t_{i-1}}$ sowie $X_0 = 100$ und betrachten die Bilder in Abbildung 4.6.

Erhöhen wir die Anzahl der Realisierungen auf 500 und betrachten dazu die Bilder in Abbildung 4.7.

Doch ein graphischer Beweis ist nicht ausreichend. Untersuchen wir die Fehler.

4.4.2 Fehleranalyse

Im Buch [KP95] sprechen die Autoren von zwei Fehlerarten: Dem absoluten Fehler (*absolute error*) und dem erwarteten Fehler (*mean error*).

Definition 4.4 (absoluter Fehler) Der Erwartungswert des Betrages von der Differenz zwischen der Approximation $Y = (Y_t : t \in [0, T])$ und dem

[2] Abbildung 4.5

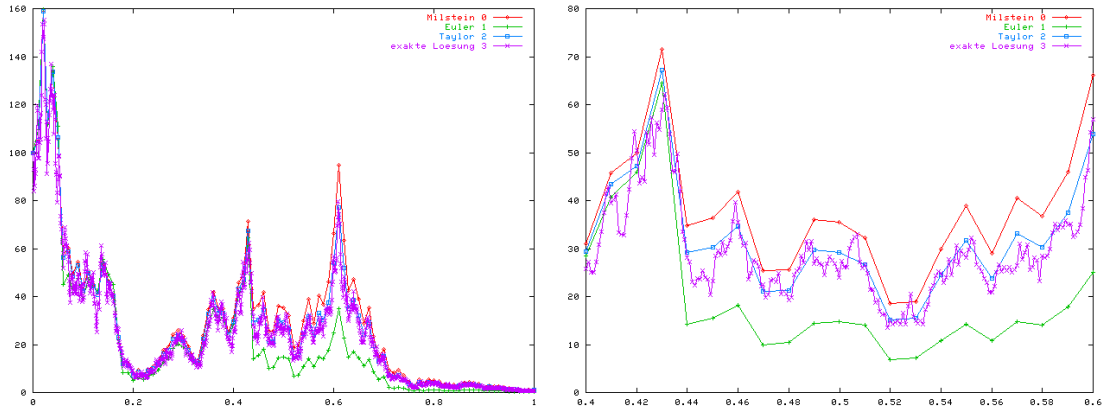

Abbildung 4.6: Die Taylor–Approximationmethode im Vergleich mit dem Euler– und dem Milstein–Verfahren und der exakten Lösung, mit $n = 100$ Realisierungen. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.)

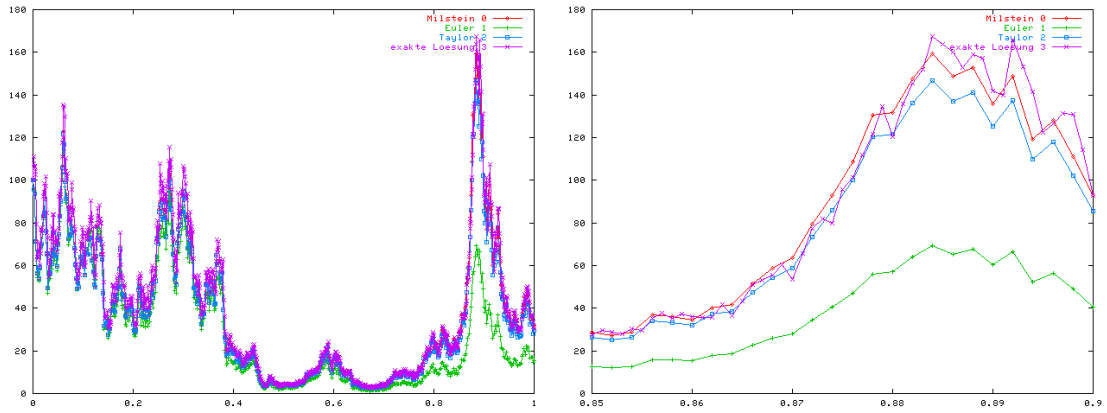

Abbildung 4.7: Die Taylor–Approximationmethode im Vergleich mit dem Euler– und dem Milstein–Verfahren und der exakten Lösung, mit $n = 500$ Realisierungen. (Die exakte Lösung ist mit 1000 Realisierungen berechnet wurden.)

Ito–Prozess $X = (X_t : t \in [0,T])$ zum Endzeitpunkt T nennen wir *absoluter Fehler*:

$$\epsilon_{abs} = E\left(|X_T - Y_T|\right). \tag{4.6}$$

Der absolute Fehler ist ein Maß der pfadweisen Beschränktheit am Ende des Zeitintervalls $[0,T]$. Im Gegensatz dazu beschreibt der erwartete Fehler das Verhalten der ersten Momente.

Definition 4.5 Der *erwartete Fehler* ist des Differenz der Erwartungswerte der Approximation $Y = (Y_t : t \in [0,T])$ und des Ito–Prozesses $X = (X_t : t \in [0,T])$:

$$\epsilon_{mean} = E\left(Y_T\right) - E\left(X_T\right). \tag{4.7}$$

Diese beiden Fehler berechnen wir für unsere Approximationsmethoden über die Mittelwertschätzung. Wir benötigen N verschiedene simulierte Pfade der Approximation. Wir bezeichnen den Wert zum Endzeitpunkt T der k-ten simulierten Trajektorie mit $X_{T,k}$ bzw. $Y_{T,k}$ und schätzen den absoluten Fehler:

$$\hat{\epsilon}_{abs} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |X_{T,k} - Y_{T,k}|. \tag{4.8}$$

Der erwartete Fehler schätzen wir folgendermaßen[3]:

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}_{mean} &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_{T,k} - E\left(X_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right\}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_{T,k} - E\left(X_0\right)\exp\{\mu T\}\right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Analog zu dem Buch [KP95], Kapitel 9.3, simlulieren wir $N = 500$ Trajektorien des Ito–Prozesses mit $X_0 = 1.0$, $\mu(X_t) = 1.5X_t$, $\sigma(X_t) = X_t$ und die Euler–, Milstein– und Taylor–Approximation für verschiedene Schrittgrößen.

In der folgenden Tabelle finden wir den absoluten Fehler.

[3] vergleich [KP95], Seite 113

Anzahl der Realisierungen	$\epsilon_{abs,Euler}$	$\epsilon_{abs,Milstein}$	$\epsilon_{abs,Taylor}$
100	0.11341	0.02635	0.00658
300	0.02770	0.00622	0.00324
500	0.02039	0.00588	0.00763
700	0.29619	0.08264	0.02076
900	0.09006	0.01696	0.01040
1100	0.04855	0.08707	0.08238
1300	1.19264	0.33138	0.10499
1500	0.17436	0.03202	0.03080

Im Vergleich dazu der erwartete Fehler:

Anzahl der Realisierungen	$\epsilon_{mean,Euler}$	$\epsilon_{mean,Milstein}$	$\epsilon_{mean,Taylor}$
100	-1.07626	-0.93650	-0.96943
300	-2.48218	-2.50366	-2.50664
500	-2.53196	-2.51745	-2.51920
700	0.07446	0.28801	0.34988
900	-1.30727	-1.20026	-1.20682
1100	1.36816	1.32963	1.33432
1300	-0.84457	0.67945	0.24308
1500	-1.61050	-1.75284	-1.75406

Da uns diese Tabelle[4] immer noch nicht als Beweis ausreicht, untersuchen wir das Konvergenzverhalten.

4.4.3 Konvergenzverhalten

Wir untersuchen den absoluten Fehler genauer, und definieren[5]:

Definition 4.6 (starke Konvergenz der Ordnung γ) Eine numerische Lösung bzw. ein Approximation–Prozess $Y(n)$ konvergiert stark gegen den Ito–Prozess X mit der Ordnung $\gamma > 0$, wenn für den absoluten Fehler gilt:

1. $\epsilon_{abs} = E\left(|X_T - Y_T|\right) \longrightarrow 0$, wenn $\delta_n = \max_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1}) \longrightarrow 0$
2. $\epsilon_{abs} \leq c \cdot \delta_n^{\gamma}$ für $\delta_n \leq \delta_0$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

[4] Die Tabelle wurden mit dem Python-Programm `Fehler.py` erstellt.
[5] vergleich [Mik98], Seite 161f

Werfen wir einen Blick auf unsere Ergebnistabellen, so sehen wir, dass unsere Approximationen tatsächlich stark konvergieren mit einer bestimmten Ordnung.

Im [KP95] auf den Seiten 324ff finden wir den Beweis, zu der Behauptung, dass die Euler–Approximation stark mit der Ordnung $\gamma = 0.5$ konvergiert.

Die Milstein–Approximation konvergiert stark mit der Ordnung $\gamma = 1.0$ und die Taylor–Approximation mit $\gamma = 1.5$.

Je höher die Konvergenzordnung, desto besser ist die Approximation. Im [KP95] finden wir weitere Approximationsverfahren höherer Ordnung, zum Beispiel die Taylor–Approximation 2.0–ter Ordnung. Ohne näher auf die theoretischen Hintergründe auf diese Annäherungsmethode einzugehen, werden wir im folgenden Kapitel erläutern, wie wir dieses Verfahren in unser Programm einbauen.

4.4.4 "Konvergenzgeschwindigkeit"

In diesem letzten Abschnitt zur Bewertung der Approximationsmethoden interessiert uns die Frage:

> "Wieviele Realisierungen braucht die Approximation, damit die Differenz zwischen den Trajektorien der Approximation und der exakten Lösung eine untere Schranke unterschreitet?"

Anders gesagt:

> "Wieviele Realisierungen braucht die Approxiamtionsmethode damit die Differenz kleiner als ein ϵ mit $\epsilon > 0$ ist bzw. gegen Null konvergiert?"

Das kleine Python–Programm `Konvergenzgeschwindigkeit.py` hilft uns bei der Beantwortung dieser Frage(n).

Unsere Ausgangsgleichung ist:

$$dX_t = 1 \cdot X_t \, dt + 1.5 \cdot X_t \, dW_t \text{ mit } X_0 = 1.0 \text{ und } t \in [0, 1]. \tag{4.10}$$

Das Ergebnis des Programms finden wir in der folgenden Tabelle:

ϵ	0.01	0.005
Euler–Approximation	$913.\overline{3}$	1490
Milstein–Approximation	$673.\overline{3}$	820
Taylor–Approximation	$526.\overline{6}$	$763.\overline{3}$

Die Anzahl der Realisierungen sind keine ganzen Zahlen, da wir den Mittelwert über eine bestimmte Anzahl von Versuchen gebildet haben, damit das Ergebnis genauer wird. Hier wurden zum Beispiel 30 Versuche gemacht.

Dieses Ergebnis sagt etwas über die Geschwindigkeit aus. Es bestätigt auch die Aussage, dass eine Approximationsmethode, die mit einer höheren Ordnung gegen die exakte Lösung stark konvergiert, auch schneller gegen diese geht.

Das ϵ können wir noch kleiner wählen, doch dieses Programm ist sehr Rechner– und somit auch Zeit–intensiv.

Doch beschäftigen wir uns vorerst mit dem Hauptprogramm.

Kapitel 5

Das Programm

Zur Untersuchung der Approximationsmethoden habe ich ein Programm und eine graphische Oberfläche geschrieben, mit dem unter anderem die Bilder in Kapitel 4 erstellt wurden. In diesem Abschnitt werden wir etwas zu dem Programm sagen. Wir gehen kurz auf die verwendete Programmiersprache Python ein, stellen einzelne Funktionen vor und erläutern, wie eine neue Approximationsmethode in das Programm eingearbeitet wird.

5.1 Python

In meiner Studienarbeit[1] wurde Python im Abschnitt 3.2 ausführlich vorgestellt. Wir verweisen an dieser Stelle kurz auf die sehr interessante Internetseite, auf der diese Programmiersprache sehr anschaulich eingeführt wird:
`http://www.honors.montana.edu/jjc/easytut/easytut/`.

5.2 Xgraps

Xgraps ist der Name des Programmes. Diese Bezeichung steht für *e**x**tendable **gr**aphical **ap**proximation **s**imulations.*

Wir sehen in der Abbildung 5.1, dass die Oberfläche in zwei Teile gegliedert ist: Das Eingabefeld und das Ausgabefeld. Auch das Programm beinhaltet zwei

[1] vergleich [Sch02]

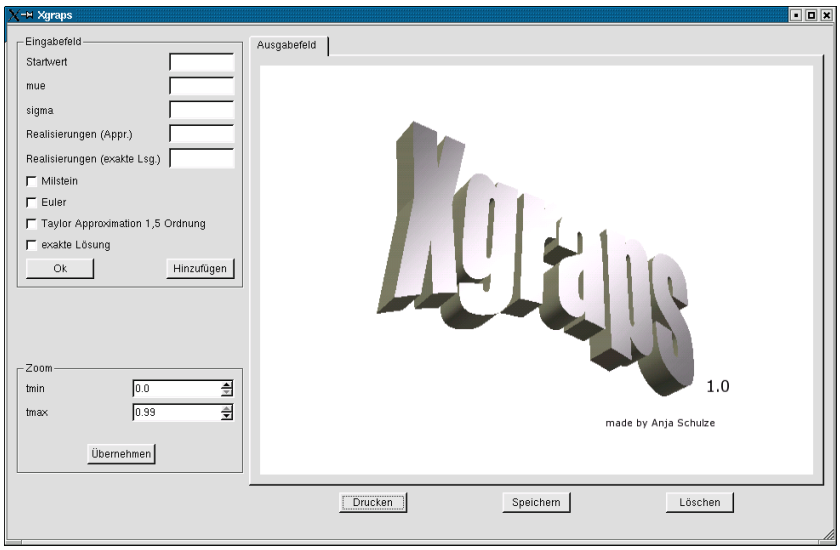

Abbildung 5.1: Ein Bildschirmfoto des Programms.

Klassen: die "Simulierer"–Klasse (Eingabefeld) und die "Karteikarte"–Klasse (Ausgabefeld).

1. Die Klasse "Simulierer" besteht aus verschiedenen Definitionen. Diese stellen wir kurz vor. Zusatzinformationen finden wir im Programmcode.

   Dateneinlesen Es werden Startwert, mue (der Wert von $\mu(X_t) = mue * X_t$), sigma (von $\sigma(X_t) = sigma * X_t$, die Anzahl der Realisierungen für die Approximationen und für die exakte Lösung eingelesen.

   Datenerzeugen ... besteht aus drei Teilen

   (a) Der Wiener–Prozess wird erzeugt[2].

   (b) Abhängig von der Markierung in der graphischen Oberfläche werden die Werte für die Euler–, Milstein– und Taylor–Approximation sowie für die exakte Lösung erzeugt.

   (c) Eine Karteikarte mit einem Bild wird definiert. (Vergleich dazu Punkt 2.)

[2] vergleich Abschnitt 3.1 in [Sch02]

Neuplotfunktion ... wird aufgerufen, wenn wir den Ok–Button clicken. Eine Karteikarte wird erzeugt, die Werte werden berechnet (das heißt die `Datenerzeugen`–Funktion wird aufgerufen) und ein Bild wird ausgegeben.

Plotfunktion ... entspricht `Übernehmen`–Button. Hier werden die Pfade in die aktuelle Karteikarte geschrieben.

Drucken–, Speichern– und Loeschenfunktion ... erklären sich aus ihren Namen.

Teilplotfunktion ... gehört zu dem Bereich "Zoom" in der graphischen Oberfläche. In der aktuellen Karteikarte wird mit Hilfe dieser Funktion ein bestimmter Teil der x–Achse (von t_{min} bis t_{max}) geplottet. So werden ein Teil der Pfade vergrößert dargestellt.

2. Die Klasse "Karteikarte" erklärt die Definitionen, die wir im Ausgabefeld benötigen.

   Listehinzufuegen ... wird gebraucht, um die Vektoren (dazu bei der Beschreibung der `plotten.py`–Datei mehr) nach und nach in eine Matrix zu schreiben.

   Bilderzeugen Die Matrix wird mit Hilfe der `plotten.py`–Funktion in graphische Pfade umgewandelt.

   (Bildspeichern und Bilddrucken werden für die Drucken– und Speichernfunktion benötigt.)

Ein wichtiger Bestandteil dieses Programms sind die Funktionen (im Ordner ***funktionen***). In den Dateien `Euler.py`, `Milstein.py` und `Taylor.py` sind die Definitionen der Approximationsmethoden in die Programiersprache Python geschrieben.

Die Werte für den Ito–Prozess werden in `exakte_Loesung.py` berechnet. Betrachten wir in diesem Zusammenhang erneut die Formel 4.3 und die daraus folgende Tabelle auf der Seite 42.

In `wienerprozess.py` wird ein Wiener–Prozess erzeugt. Auf den genauen Algorithmus wird in der Studienarbeit eingegangen.

In der graphischen Oberfläche wird die Anzahl der Realisierungen für die exakte Lösung eingelesen. Der erste Wiener–Prozess, der in der Funktion erzeugt wird, hat genauso viele Realisierungen, da mit diesem Wiener–Prozess die exakte Lösung ausgerechnet wird. Der zweite Teil der Funktion zieht einen bestimmten Teil (entspricht der Anzahl der Realisierungen für die Approximationsmethoden) der Elemente des Prozesses heraus, um damit die Approximationen auszurechen. Deshalb beachten wir immer, dass die Anzahl der Realisierungen für die exakte Lösung größer (gleich) der Anzahl für die Approximationsmethoden ist.

Die vorerst letzte Funktion auf die wir näher eingegehen steht in der Datei `plotten.py`. Hier werden speziell die Daten aus der oben erwähnten Matrix in ein Koordinatensystem geschrieben. Dieses Koordinatensystem wird in eine `png`–Datei abgespeichert, die dann wieder in der Karteikarte geladen wird. Um es abzuspeichern oder zudrucken, haben wir die entsprechenden Funktionen.

Dieses Programm ermöglicht es Jedem Approximationsmethoden hinzuzufügen ohne größeren Aufwand.

5.3 Eine neue Approximationsmethode wird in das Programm eingebaut

Eine geeignete Approximationsmethode wäre die Taylor–Approximation 2.0–ter Ordnung ([KP95], Seite 356ff). Sei $Y = (Y_{t_i} : i = 0, 1, \ldots, n)$ diese Approximationsmethode bezüglich des Ito–Prozesses $X = (X_t : t \in [0, 1])$, wobei $Y_{t_0} = Y_0 = X_0$ ist.

Analog zu `Euler.py` , `Milstein.py` und `Taylor.py` schreiben wir die Definition des Approximation als Funktion in Python und bezeichnen sie als `neue_Approximation.py` oder ähnliches. Wichtig ist, dass wir sie in dem Ordner `funktionen` abspeichern.

Über einen Designer (zum Beispiel über den Qt–Designer[3]) ändern wir die

[3]Der Qt–Designer ist im Qt–Paket enthalten, welchen unter Windows und Linux be-

graphische Oberfläche[4] indem wir ein Ankreuz–Feld (bzw. einen Check–Button) und eine entsprechende Bezeichung in dem Eingabefeld einfügen.

Den Namen des Check–Button merken wir uns unbedingt oder ändern ihn in zum Beispiel "Check_neue_Approximation" um. Wir speichern unsere neue graphische Oberfläche unter dem alten Namen ab. Um diese in Python einzubinden, brauchen wir den Befehl

```
pyuic hauptfenster.ui -o hauptui.py
```

aus dem Paket `Pyqt`[5].

In der Datei `haupt.py` arbeiten wir weiter. Zuerst importieren wir unsere Approximationsfunktion, in dem wir in den Kopf des Programms den Befehl

```
import neue_Approximation
```

schreiben.

Jetzt fügen wir in die Definition **Datenerzeugen** die folgende If–Anweisung ein:

```
if self.Check_neue_Approximation.isChecked():
        self.daten_Vektor=neue_Approximation.funktion(self.WP_Approx,self.Startwert,self.mue,self.sigma,self.n)
        daten=Numeric.swapaxes(Numeric.array([x_Approx,self.daten_Vektor]),0,1)
        Kartei.Listehinzufuegen(daten, 'Name der neuen Approximation ')
```

Wir sind fertig: Wir haben eine neue Approximationsmethode in das Programm eingebaut.

nutzt werden kann. Zu finden ist diese Software unter www.trolltech.com. Unter SuSE–Linux benötigen wir die Pakete Qt und Qt–devel. Diese Software ist bereits bei SuSE enthalten.

[4]Sie ist abgespeichert unter `hauptfenster.ui`.

[5]zu finden unter www.riverbankcomputing.co.uk/pyqt/ bzw. bei SuSE in den Paketen PyQt und PyQt–devel

Schlussbemerkungen

Die Aufgabenstellung, ein Programm zu entwickeln, welches Approximationsmethoden von stochastischen Differentialgleichungen simuliert, erforderte auf der einen Seite ein Eindringen in das komplexe Gebiet der stochastischen Differentialgleichungen und auf der anderen Seite Kenntnisse in Programmieren.

Diese Diplomarbeit ist eine Weiterführung meiner Studienarbeit, die sich intensiver mit dem Wiener–Prozess beschäftigte. Sie dient als Grundbaustein. Das Programm, was ich weiter entwickelte, wurde durch die graphische Oberfläche erweitert und mit Hilfe der Klassen– und Funktionen–Modularistierung besser strukturiert.

Es sei darauf hingewiesen, dass das Programm auf der linearen stochastischen Differentialgleichung, die auch Grundlage der Black–Scholes–Formel ist, beruht. Es ist aber möglich, dass Programm umzuschreiben für eine allgemeinere stochastische Differentialgleichung.

Das Programm soll als Vorlesungsmaterial für Professor Christoph dienen, um das Verhalten von stochastischen Differentialgleichung zu erläutern.

Literaturverzeichnis

[BR98] Baxter, M.; Rennie, A.: *Financial Calculus*. Cambridge University Press, Campbridge, United Kingdom, 1998.

[FHH] Franke, J.; Hardle, W.; Hafner, C.: Einführung in die Statistik der Finanzmärkte(www.quantlet.com/mdstat/scripts/sfm/pdf/sfm.pdf).

[Kle99] Klebaner, F. C.: *Introduction to Stochastic Calculus with Application*. Imperial College Press, London, 1999.

[KP95] Kloeden, P. E.; Platen, E.: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1995.

[Mik98] Mikosch, T.: *Elementary stochastic Calculus*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1998.

[Oek98] Oeksendahl, B.: *Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1998.

[Sch02] Schulze, A.: *Simulation der Euler– und Milsteinapproximaiton*. Magdeburg, 2002.

[SV97] Stroock, D. W.; Varadhan, S. R. S.: *Multidimensional Diffusion Processes*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1997.

[SVR] SVRB Internet Glossar (http://www.raiffeisen.ch/lexikon/index-d.htm).

[Wol96] Woll, A.: *Wirtschaftslexikon*. R. Oldenbour Verlag, München, Wien, 1996.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur mit erlaubten Hilfsmitteln angefertigt habe.

Magdeburg, 6. Juni 2003